

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Σ.Α.Χ.Μ

26 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 – 12:00-15:00

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΣΗΣ, ΕΥΤΥΧΙΑ ΜΑΜΖΕΡΙΔΟΥ

ΘΕΜΑ 1. Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α) Αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$ υπάρχει, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$.

(β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε τουλάχιστον μια από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, όπου $a_n^+ = a_n$ αν $a_n > 0$ και 0 διαφορετικά, $a_n^- = a_n$ αν $a_n < 0$ και 0 διαφορετικά, αποκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ συγκλίνει.

(δ) $0, 123 + 0, 000123 + 0, 000000123 + \dots > \frac{41}{333}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να διατυπωθούν τα εξής κριτήρια: (1) κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy, (2) κριτήριο του Leibniz.

(β) Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ και να εξεταστεί αν η σύγκλιση είναι απόλυτη.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(1) = 1$ και $f'(x) = \frac{1}{x^2 + (f(x))^2}$ για $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \frac{\pi+4}{4}$.

(β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx$ και $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ μιας συνάρτησης $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει.

(β) Έστω $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} = 0$. Μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} y^{2k}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να βρεθούν τα σύνολα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!} x^n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2.5

ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ