Προοδος στον Απειροστικο Λογισμο ΙΙ

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων-Κατευθυνση Σ.α.χ.μ
5 Ιουνιου 2014 - 09:00-11:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(γ) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει.

(δ) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ των θετικών και αρνητικών όρων, αντίστοιχα, της σειράς, αποκλίνουν.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

(β) Έστω $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$. Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 3. Να διατυπωθεί το κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές και να εφαρμοστεί στη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, αποδεικνύοντας πρώτα ότι $\int_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}\, dx$, $a > 0$, συγκλίνει για $p > 1$. Επίσης, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} \leq \dfrac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και θετική συνάρτηση.

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \dfrac{1}{2}$.

Βαθμος καθε θεματος $= 2.5$
Αριστα $= 10$
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ