Εξεταση στον Απειροστικο Λογισμο Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Κατευθυνση ΣΑΧΜ
17 Φεβρουαριου 2015 – 09:00-12:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. (α) Να διατυπώσετε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k}\, b^k.$$

(γ) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup, inf του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{w^n}{(1+w)(1+w^2)\ldots(1+w^n)}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου w ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

(β) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 2$. Αν $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\}$, τότε να εξετάσετε αν τα σύνολα A και $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να αποδειχθεί ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή διαγώνιο $d > 0$, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

(β) Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ $\forall x > 1$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+\sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε ότι αν ο n είναι περιττός φυσικός αριθμός, τότε κάθε εξίσωση $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

(β) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, ότι $f(x) = 0$ μόνο για $x = a$, και ότι $f(x) > 0$ για κάποιο $x > a$ καθώς και για κάποιο $x < a$. Τί μπορείτε να πείτε για το $f(x)$ για όλα τα $x \neq a$;

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

(β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -\sqrt{2}$ αν $x \in [-1, 0)$, $g(0) = 0$, και $g(x) = 4$ αν $x \in (0, 1]$. Υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [-1, 1]$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Taylor και να το χρησιμοποιήσετε για να αποδείξετε ότι αν $x > 0$, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ