Εξεταση στον Απειροστικο Λογισμο Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων-Εισαγωγικη κατευθυνση ΣΑΧΜ
2 Σεπτεμβριου 2013 - 09:00-12:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε με επαγωγή στο n ότι $1+r+r^2+\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, για κάθε $r\in\mathbb{R}$, $r\neq 1$.

(β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή όχι η πρόταση:

Υπάρχει ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο A ακεραίων αριθμών τέτοιο ώστε $\sup(A)\notin A$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας!

ΘΕΜΑ 2. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο της ακολουθίας $a_n=\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)!}$, καθώς επίσης και το όριο της ακολουθίας $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $b_1=1$ και $b_{n+1}=\sqrt{1+b_n}$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να αποδειχθεί ότι αν $a>1$, τότε $(1+x)^a\geq 1+ax$ για όλα τα $x>-1$, και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα Taylor, να αποδείξετε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$.

(β) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2x$ αν x ρητός και $g(x)=x+3$ αν x άρρητος. Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής *μόνο* στο $x_0=3$. Είναι η g παραγωγίσιμη στο $x_0=3$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας!

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $a,b,c>0$ και $d<e<r$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{a}{x-d}+\dfrac{b}{x-e}+\dfrac{c}{x-r}=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Πρέπει να επιλέξετε και να παρουσιάσετε μόνο ένα εκ των (β) και (γ) παρακάτω.

(β) Έστω $a_1, a_2,\ldots,a_n$ πραγματικοί αριθμοί και έστω f μια συνάρτηση ορισμένη επί του $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της f.

(γ) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις επί του $[a,b]$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A=\{x\in[a,b]: f(x)=g(x)\}$ έχει την ιδιότητα ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία σημείων του A και $x_n\to x_0$, τότε $x_0\in A$.

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ