Εξεταση στον Απειροστικο Λογισμο Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατ. & Αναλ.-Χρημ. Μαθηματικων
6 Ιουνιου 2013 / 15:00-18:00
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Θεωρούμε n πραγματικούς αριθμούς $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$.

(β) Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και έστω ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x \in (a, b)$ για το οποίο οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση η ακολουθία $a_n = \dfrac{[nc]}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $c \in \mathbb{R}$. (για $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x).

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αρρήτων αριθμών τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

(γ) Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να δώσετε πλήρη απόδειξη για το ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής.

(β) Έστω $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Ποιά τιμή πρέπει να πάρει το c ώστε η f να είναι συνεχής στο 0;

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup, inf, του συνόλου $A = \left\{ \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθούν όλες οι τιμές των σταθερών a και b για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ για $x < \pi$, και $f(x) = ax + b$ για $x \geq \pi$, είναι παραγωγίσιμη στο π.

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \ln(1 + x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ