Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"
Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.
1 Φεβρουαριου 2019, 09:00–12:00
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, και min του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Απαιτείται πλήρης αιτιολόγηση ισχυρισμών.)

(β) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ τότε υπάρχουν $\rho \in \mathbb{Q}$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ με $x < \rho < \alpha < y$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\left(\frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 1.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία έχει πρώτο όρο τον $a_1 = 3$ και ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2 - \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Να δειχθεί ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Έστω $g(x) = 2x$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $g(x) = x + 3$ αν $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής μόνο στο $x_0 = 3$ και να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας σε κάθε $x \neq 3$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L' Hospital; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Επίσης, να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

(β) Να δείξετε ότι $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να διατυπωθούν τα παρακάτω θεωρήματα: θεώρημα του Darboux, γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, θεώρημα του Taylor, θεώρημα σταθερού σημείου.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Επίσης, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor, να δείξετε ότι οι λύσεις αυτές είναι κατά προσέγγιση οι $\sqrt{2/3}$ και $-\sqrt{2/3}$. Επιπλέον, να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος στις παραπάνω προσεγγίσεις.

Βαθμος καθε θεματος = 2 Μοναδες
Αριστα = 10 Μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ