Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

10 Φεβρουαριου 2017 – 9πμ-12μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N}\}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα $\inf(A)$, $\min(A)$, $\sup(A)$, $\max(A)$.

(β) Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ είναι άρρητος.

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $D_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Δείξτε ότι $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x = y$ αν και μόνο αν $D_x = D_y$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, δεν είναι ακολουθία Cauchy.

(β) Θέτουμε $a_1 = 1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(γ) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = 10$, και έστω $E = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 10.004\}$. Να εξετάσετε αν τα σύνολα E και $\mathbb{N} - E$ είναι πεπερασμένα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να εξετάσετε για ποιά $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} [x]$ (όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x). Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει το παραπάνω όριο, να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} [x] = [x_0]$.

(β) Έστω $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής. Επίσης, σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι ασυνεχής να προσδιοριστεί το είδος της ασυνέχειας.

(γ) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς επί του $[a, b]$, και έστω $G = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$. Υποθέτουμε ότι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σημείων του G η οποία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό z. Δείξτε ότι $z \in G$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Darboux και το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.

(β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x$.

(γ) Έστω $a > 0$, $b > 0$ με $a^x + b^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $ab = 1$.

ΘΕΜΑ 5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \cos x = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor δείξτε ότι οι λύσεις αυτές είναι κατά προσέγγιση οι $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Εκτιμήστε τα σφάλματα στις παραπάνω προσεγγίσεις των δύο λύσεων της εξίσωσης $x^2 - \cos x = 0$.

Βαθμος καθε θεματος = 2 Μοναδες

Αριστα = 10 Μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ