Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

16 Φεβρουαριου 2016 – 9πμ-12μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max, και min του συνόλου

$$A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(β) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ είναι άρρητος.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να εξετάσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής: "Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε $\limsup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\liminf a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$". Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, δεν είναι ακολουθία του Cauchy.

(γ) Έστω $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ ριζικά}}$, ... Να αποδείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$.

(β) Ποιά είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο $(1, \sqrt{2})$;

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1, 0, 1$.

(β) Έστω $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής επί του $[-1,1]$ και τέτοια ώστε $x^2 + (g(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Να αποδείξετε ότι είτε $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$, είτε $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να αποδείξετε την ανισότητα

$$\arctan\beta - \arctan\alpha < \beta - \alpha$$

όπου $\beta > \alpha$.

(β) Να αναπτύξετε το πολυώνυμο $p(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ σε δυνάμεις του $x - 1$ χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor.

Βαθμος καθε θεματος = 2 Μοναδες

Αριστα = 10 Μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!