Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"
Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.
2 Φεβρουαριου 2018, 9πμ–12μμ
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σύνολο A με n στοιχεία, το δυναμοσύνολο $\wp(A)$ του A (δηλαδή, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A) έχει 2^n στοιχεία.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου $X = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. Έστω $Z = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 5.1\}$. Να εξετάσετε αν τα σύνολα Z και $\mathbb{N} - Z$ είναι πεπερασμένα.

(β) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\left(\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής. Επίσης, σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι ασυνεχής, να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας.

(β) Χρησιμοποιώντας βασικά θεωρήματα στη συνέχεια συναρτήσεων, να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ και για κάθε $\beta > 0$ υπάρχει μοναδικός $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $\alpha^n = \beta$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right), \quad \lim_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right].$$

(β) Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, και $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, και $f(0) = 0$ και $g(1) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{g'(\rho)}{g(\rho)} = 0.$$

ΘΕΜΑ 5. Να διατυπωθεί το θεώρημα του Taylor. Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα να αποδείξετε ότι

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2\cos x \geq 2.$$

Βαθμος καθε θεματος = 2 Μοναδες
Αριστα = 10 Μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ