Τελικη Εξεταση στον Απειροστικο Λογισμο Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου - ΤΣΑΧΜ
4 Φεβρουαριου 2013 - 09:00-12:00
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Εξετάστε για ποιές τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύει ότι $n! > 2^n$.

(β) Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

(γ) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup, inf, του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$ και στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{Q}$. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \dfrac{1}{4-a_n}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 2-\sqrt{3}$.

(β) Έστω $x > 0$. Να εξεταστεί η ακολουθία $a_n = \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα $\limsup(a_n)$, $\liminf(a_n)$, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, και $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος είναι κατά μια μονάδα μικρότερος από τον κύβο του; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

(β) Για δοθέν $\varepsilon > 0$, βρείτε ένα δ τέτοιο ώστε $\left|\dfrac{t^2+t}{t^2-1} - 1\right| < \varepsilon$ όταν $t > \delta$. Ποιό είναι το συμπέρασμά σας από το παραπάνω;.

(γ) Έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

ΘΕΜΑ 4. (α) Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε x, $f(-3) = -3$, $f(3) = 3$, και $|f'(x)| \leq 1$. Δείξτε ότι $f(0) = 0$.

(β) Έστω $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ για $x \neq 0$, έστω $f(0) = 0$, και έστω $g(x) = \sin x$ για $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη επί του $\mathbb{R}$ αλλά ότι η f' δεν είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$. Επίσης, να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ και $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$, και αν υπάρχουν, να τα υπολογίσετε.

ΘΕΜΑ 5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor, να δείξετε ότι οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι κατά προσέγγιση $\pm\sqrt{2/3}$ και να δώσετε μια εκτίμηση του σφάλματος της προσέγγισης.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.