Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων – Εισαγωγικη κατευθυνση ΣΑΧΜ
11 Ιουνιου 2015 – 12:00μμ-15:00
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ ισχύει ότι $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

(γ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα max, min, sup, inf του συνόλου $X = \{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $a_1 = \sqrt{6}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι γνήσια αύξουσα και συγκλίνουσα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4ax^3+3bx^2+2cx = a+b+c$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$ και έστω ότι $f(\rho) = 0$ για κάθε $\rho \in \mathbb{Q}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Έστω $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}x^2+\cos x \geq 1$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f επί του $[-1,1]$ και ότι είναι παραγωγίσιμη επί του $(-1,1)$. Επίσης, να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} επί του $(-1,1)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \dfrac{2x}{\pi}$.

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ