Προαιρετικη Προοδος στον Απειροστικο Λογισμο Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
10 Ιανουαριου 2013
Διαρκεια εξετασης: 2 ωρες (15:00-17:00)
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι αν $x = p + \sqrt{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{Q}$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $x^m = a + b\sqrt{q}$ για κάποια $a, b \in \mathbb{Q}$. Αποδείξτε επίσης ότι $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max, min του συνόλου $A = \left\{ \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 2$ και έστω $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2\}$. Να εξετάσετε αν (1) το σύνολο A είναι πεπερασμένο, (2) το σύνολο $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένο.

(β) Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

Αν η (a_n) είναι αύξουσα και κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον αριθμό a, τότε $a_n \to a$.

(γ) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ και $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(δ) Να βρείτε τα $\limsup(a_n)$, $\liminf(a_n)$, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ της

$$a_n = (2, -1, 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, \ldots).$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $[a, b]$ και τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για όλα τα $x \in [a, b]$. Τί συμπεραίνετε για την f;

(β) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}.$$

Για κάθε ένα από τα σημεία ασυνέχειας της f (αν υπάρχουν) να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδειχθεί ότι $(x-1)/x < \ln x < x - 1$ για $x > 1$.

(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$ $(0, \infty)$.

(γ) Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n \to \infty} n f(1/n) = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.