Προαιρετικη Προοδος στον Απειροστικο Λογισμο Ι - **Λυσεισ των θεματων**
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
10 Ιανουαριου 2013
Διαρκεια εξετασησ: 2 ωρεσ (15:00-17:00)
Διδασκων: Ελευθεριοσ Ταχτσησ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι αν $x = p + \sqrt{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{Q}$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $x^m = a + b\sqrt{q}$ για κάποια $a, b \in \mathbb{Q}$. Αποδείξτε επίσης ότι $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max, min του συνόλου $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Λύση. (α) Έστω x, p, q όπως στη διατύπωση της άσκησης. Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$x^m = a + b\sqrt{q} \ \text{ για κάποια } a, b \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Για $m = 1$, η (1) ισχύει λόγω της υπόθεσης για το x (εδώ $a = p$ και $b = 1$). Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για τον φυσικό αριθμό $m + 1$. Έχουμε:

$$x^{m+1} = x^m x = (a + b\sqrt{q})(p + \sqrt{q}) = (ap + bq) + (a + bp)\sqrt{q}.$$

Εφόσον $a, b, p, q \in \mathbb{Q}$, έπεται ότι $(ap + bq), (a + bp) \in \mathbb{Q}$, συνεπώς η (1) ισχύει για $m + 1$. Άρα, η (1) ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ο δεύτερος ισχυρισμός αποδεικνύεται επίσης με επαγωγή και αφήνεται ως απλή άσκηση για τον αναγνώστη.

(β) Έχει λυθεί στις παραδόσεις του μαθήματος. □

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 2$ και έστω $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2\}$. Να εξετάσετε αν (1) το σύνολο A είναι πεπερασμένο, (2) το σύνολο $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένο.

(β) Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**
Αν η (a_n) είναι αύξουσα και κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον αριθμό a, τότε $a_n \to a$.

(γ) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ και $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(δ) Να βρείτε τα $\limsup(a_n)$, $\liminf(a_n)$, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ της

$$a_n = (2, -1, 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, \ldots).$$

Λύση. (α) Το σύνολο A μπορεί να είνα πεπερασμένο ή άπειρο. Πράγματι, αν $a_n = 2$, τότε $A = \mathbb{N}$ (άπειρο) και $\mathbb{N} - A = \emptyset$ (το οποίο είναι πεπερασμένο). Αν $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, τότε $A = \emptyset$, δηλαδή πεπερασμένο, και $\mathbb{N} - A = \mathbb{N}$. Τέλος, αν $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, τότε $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ περιττός}\}$ (το οποίο είναι άπειρο) και $\mathbb{N} - A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ άρτιος}\}$ (άπειρο).

Τα (β) και (γ) έχουν λυθεί στις παραδόσεις του μαθήματος.

(δ) Παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} = 1 + \frac{1}{n}$ και $a_{2n} = -\frac{1}{n}$. Άρα, 1 και 0 είναι υπακολουθιακά όρια της (a_n). Από την άλλη μεριά, εφόσον κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή φυσικός και $\lim a_{2n} = 0 \neq 1 = \lim a_{2n-1}$, έπεται ότι οι 1 και 0 είναι τα μόνα υπακολουθιακά όρια της (a_n). Συνεπώς, $\limsup(a_n) = 1$ και $\liminf(a_n) = 0$. Τέλος, είναι άμεσο να δείτε ότι $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 2 = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -1 = \min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $[a, b]$ και τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για όλα τα $x \in [a, b]$. Τί συμπεραίνετε για την f;

(β) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}.$$

Για κάθε ένα από τα σημεία ασυνέχειας της f (αν υπάρχουν) να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας.

Λύση. (α) Συμπεραίνουμε ότι είτε $f(x) = -1$ για όλα τα $x \in [a, b]$ είτε $f(x) = 1$ για όλα τα $x \in [a, b]$, με άλλα λόγια η f είναι σταθερή. Αν όχι, και εφόσον $|f(z)| = 1$ $\forall z \in [a, b]$, τότε υπάρχουν $x, y \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x) = 1$ και $f(y) = -1$. Αφού η f είναι συνεχής επί του $[a, b]$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών έπεται ότι η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ -1 και 1. Αυτό αντιβαίνει στο γεγονός ότι $|f(z)| = 1$ $\forall z \in [a, b]$, άρα η f είναι σταθερή.

(β) Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Η f δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, έστω $x_n = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}}$. Τότε $x_n \to 0$, αλλά $f(x_n) \to +\infty$. Το 0 είναι σημείο ασυνέχειας β′ είδους (δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$). □

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδειχθεί ότι $(x-1)/x < \ln x < x - 1$ για $x > 1$.

(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ $(0, \infty)$.

(γ) Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

Λύση. (α) Έστω $x > 1$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την ln στο διάστημα $[1, x]$ βρίσκουμε $c \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ή $\frac{1}{c} = \frac{\ln x}{x-1}$. Επειδή $1 < c < x$, έχουμε ότι $\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1$ και συνεπώς από την σχέση $\frac{1}{c} = \frac{\ln x}{x-1}$ και το γεγονός ότι $x - 1 > 0$ παίρνουμε ότι $\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$, όπως το θέλαμε.

(β) Το ζητούμενο όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή 0^0. Για $x \in (0, \pi/2)$ έχουμε $x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]\cdot\left[\frac{\sin x}{x}\right] = -(0\cdot 1) = 0.$$

Επειδή η συνάρτηση $y \mapsto e^y$ είναι συνεχής στο $y = 0$, έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

(γ) Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι, εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και επειδή $f(0) = f'(0) = 0$ έπεται ότι $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Συνεπώς (από την αρχή της μεταφοράς για το όριο) για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του πεδίου ορισμού της $f(x)/x$ με $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ (και υποθέτοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_n \in D(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}$) έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} nf(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$. □