Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων – Εισαγωγικη κατευθυνση ΣΑΧΜ
30 Σεπτεμβριου 2015 – 9πμ-12μμ
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Να εξετάσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής: "Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, τότε $\sup(A) \in A$". Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = (0, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 1, 4, 0, 1, 5, \ldots)$. Να βρεθούν τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$.

(β) Έστω $z \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{[nz]}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, η οποία ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο $2 - \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x + 3, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής.

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, και να σχεδιάσετε το γράφημα της f.

(γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + 2x + \sin 2x}{(2x + \sin 2x)\, e^{\sin x}}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L'Hospital για να πάρουμε την σωστή απάντηση; Να εξηγήσετε πλήρως. (Υπενθυμίζουμε ότι $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.)

ΘΕΜΑ 4. (α) Όπως είναι γνωστό $(e^x)' = e^x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν άλλες συναρτήσεις που συμπίπτουν με την παράγωγό τους παντού; (Υπόδειξη: Αν f είναι τέτοια ώστε $f'(x) = f(x)$ για όλα τα x, τότε να θεωρήσετε την συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$.)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 + 15x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

(γ) Να αποδείξετε ότι οι τετραγωνικές ρίζες δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό N^2 διαφέρουν λιγότερο από $1/(2N)$.

ΘΕΜΑ 5. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Taylor και να το χρησιμοποιήσετε για να αποδείξετε ότι:

(α) μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του e με όποιο βαθμό ακριβείας θέλουμε.

(β) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ για $x > 0$.

Βαθμος καθε θεματος = 2
Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ