Εξεταση στο μαθημα "Απειροστικος Λογισμος Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εις. κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

18 Σεπτεμβριου 2017 – 9πμ-12μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Δίνεται το σύνολο $X = \{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα $\inf(X)$, $\sup(X)$, $\min(X)$, $\max(X)$.

(β) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(β) Να εξεταστεί αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με n-οστό όρο $a_n = (-1)^n \frac{\sin 4n + \cos 11n}{n^7 + 1}$ συγκλίνει. Στη περίπτωση που συγκλίνει, να βρεθεί το όριο.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$xy - y^2 \leq f(x) - f(y) \leq x^2 - xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{αν } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{αν } 0 < x \leq 1, \\ \frac{x^2}{x^2+1} & \text{αν } 1 < x. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί με χρήση του ε-δ ορισμού του ορίου μιας συνάρτησης ότι (1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, (2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ και (3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f να είναι κοίλη στο $(-\infty, \kappa]$ και κυρτή στο $[\kappa, +\infty)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\cos x - 2x = 0$ έχει *ακριβώς μια* λύση στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5. Να διατυπωθεί το θεώρημα του Taylor. Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα να αποδείξετε ότι αν $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f'(0) = 0$, τότε υπάρχει $a \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'''(a) \geq 1$.

Βαθμος καθε θεματος = 2 Μοναδες

Αριστα = 10 Μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ