Φυλλάδιο 1 στον Απειροστικό Λογισμό Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

1. Να γίνουν όλες οι άλυτες ασκήσεις των παραδόσεων του μαθήματος.

2. (α΄) Να αποδείξετε με επαγωγή στο n ότι:
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$
για κάθε $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$.

   (β΄) Να αποδείξετε το παραπάνω θέτοντας $S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση επί r, και λύνοντας τις δύο εξισώσεις ως προς S.

3. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

4. Να εξετάσετε για ποιές τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύει η ανισότητα $2^n > n^2$.

5. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι:

   (α΄) Αν $0 < a < \frac{1}{n}$, τότε $(1 + a)^n < \frac{1}{1-na}$.

   (β΄) Αν $0 \leq a \leq 1$, τότε $1 - na \leq (1 - a)^n \leq \frac{1}{1+na}$.

6. Αν $a > 0$, τότε $(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

8. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

   (α΄) Αν $a > 1$, τότε $a^n > a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

   (β΄) Αν $a > 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$, αν και μόνο αν, $m < n$.

   (γ΄) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^n < a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

   (δ΄) Αν $0 < a < 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$, αν και μόνο αν, $m > n$.

9. (George Pólya, 1888-1985. Ούγγρος Μαθηματικός με θεμελιώδη συμβολή στη Συνδυαστική, Θεωρία Αριθμών, Αριθμητική Ανάλυση, και Θεωρία Πιθανοτήτων). Βρείτε το σφάλμα στο ακόλουθο επιχείρημα, το οποίο ισχυρίζεται ότι αποδεικνύει με μαθηματική επαγωγή ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα:

   - Αν έχουμε ένα μόνο άλογο, τότε υπάρχει ένα μόνο χρώμα (οπότε για $n = 1$ ο ισχυρισμός είναι σωστός).
   - Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε n άλογα έχουν το ίδιο χρώμα. Έστω τώρα ένα σύνολο U από $n+1$ άλογα, τα οποία αριθμούμε ως $1, 2, \ldots, n+1$. Θεωρούμε τα εξής δύο σύνολα: $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ και $B = \{2, 3, \ldots, n+1\}$. Σαφώς, $U = A \cup B$. Επίσης, κάθε ένα από τα A και B είναι ένα σύνολο που αποτελείται από ακριβώς n άλογα. Από την υπόθεση της επαγωγής, όλα τα άλογα του A έχουν το ίδιο χρώμα και όλα τα άλογα του B έχουν το ίδιο χρώμα. Εφόσον τα σύνολα A και B έχουν κοινά στοιχεία, έπεται ότι όλα τα άλογα του U έχουν το ίδιο χρώμα. Η επαγωγή ολοκληρώθηκε και ο ισχυρισμός ''έχει αποδειχθεί''.

10. Να αποδείξετε ότι η αρχή της καλής διάταξης συνεπάγεται την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Αυτό, μαζί με το γεγονός ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή ισχύει (βλ. παραδόσεις μαθήματος), δίνει ότι οι δύο αρχές είναι ισοδύναμες προτάσεις.

11. Επισκεφθείτε τη Βιβλιοθήκη της Σχολής, επιλέξτε κάποιο σύγγραμμα Απειροστικού Λογισμού και μελετήστε την *ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου*. Προσπαθήστε να γράψετε αναλυτικά και με πλήρη αιτιολόγηση κάθε βήμα της απόδειξης.