Φυλλάδιο 2 στον Απειροστικό Λογισμό Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

1. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας στα ακόλουθα ερωτήματα:
   (α′) Αν a ρητός και b άρρητος, είναι ο $a+b$ άρρητος; Τι συμβαίνει αν a, b είναι άρρητοι;
   (β′) Αν a ρητός και b άρρητος, είναι ο ab άρρητος;
   (γ′) Υπάρχει αριθμός a ώστε a^2 να είναι άρρητος, αλλά ο a^4 να είναι ρητός;
   (δ′) Υπάρχουν δύο άρρητοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα και το γινόμενο να είναι και οι δύο ρητοί;

2. Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ είναι άρρητοι.

3. Να αποδείξετε ότι ο $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος.

4. Ισχύει ότι κάθε φυσικός αριθμός $n>1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (χωρίς να παίρνουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων). (Υπενθυμίζουμε ότι στο μάθημα αποδείξαμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n>1$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη). Χρησιμοποιώντας το παραπάνω γεγονός να αποδείξετε ότι αν n είναι φυσικός αριθμός, ο οποίος δεν είναι το τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

5. Σωστό ή λάθος; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
   (α′) Αν $a=\sup A$ και $\varepsilon>0$, τότε υπάρχει $x\in A$ με $a-\varepsilon<x<a$.
   (β′) Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ με $x<y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τέτοιοι ώστε $x<r<y$.
   (γ′) Αν A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, τότε $\sup A\in A$.

6. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup, inf των εξής συνόλων:

$$A=\left\{1+(-1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{n} : n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$B=\left\{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^m} : n, m\in\mathbb{N}\right\}.$$

7. Υποθέτουμε ότι A είναι ένα μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $-A=\{-x : x\in A\}$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $-A$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Επιπλέον, να αποδείξετε ότι $-\sup(-A)=\inf A$. (Το παραπάνω είναι ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης του αποτελέσματος ‘‘Η αρχή της πληρότητας των πραγματικών αριθμών συνεπάγεται ότι κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum’’ που αποδείξαμε στο μάθημα).

8. Να αποδείξετε ότι η αρχή της πληρότητας του $\mathbb{R}$ και η πρόταση ‘‘Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum’’ είναι ισοδύναμες.

9. Να λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το βιβλίο ‘‘Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. Μια εισαγωγή στην Ανάλυση’’ του Michael Spivak: **1, 12, 13, 17 (σελ. 111-114)**.

10. Έστω A και B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A=\inf B$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $a\in A$ και $b\in B$ τέτοιοι ώστε $b-a<\varepsilon$.

11. Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sup A=\inf A$. Τι συμπεραίνετε για το A;

12. Έστω A και B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Να αποδείξετε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

13. Έστω A και B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι φραγμένο και ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$. Ισχύει κάτι ανάλογο για το $\sup(A \cap B)$ ή το $\inf(A \cap B)$;

14. Να συμπληρωθούν όλες οι λεπτομέρειες σε αποδείξεις του μαθήματος που αφορούν την ενότητα ''Η πληρότητα των πραγματικών αριθμών''.