Φυλλάδιο 3 στον Απειροστικό Λογισμό Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

1. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|a| < 1$. Να αποδείξετε ότι η (a^n) συγκλίνει στο 0.

   (β) Έστω $a \leq -1$. Να αποδείξετε ότι η (a^n) δεν συγκλίνει.

2. Έστω (a_n) τέτοια ώστε $a_n \to 2$. Αν $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\}$, τότε να εξετάσετε αν τα σύνολα A και $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένα.

3. *Αληθής ή ψευδής;* **Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας!**

   (α′) Έστω $a_n \to a$, $b_n \to b$ και $a_n < b_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε $a < b$.

   (β′) Είναι δυνατόν μια ακολουθία που δεν περιέχει τα 0 ή 1 ως όρους, να περιέχει υπακολουθίες που συγκλίνουν σε κάθε ένα από αυτούς τους αριθμούς.

   (γ′) Μια μονότονη ακολουθία που αποκλίνει μπορεί να περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

   (δ′) Υπάρχει ακολουθία που περιέχει υπακολουθίες που συγκλίνουν σε κάθε σημείο του συνόλου $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

   (ε′) Υπάρχει μια ακολουθία που δεν είναι φραγμένη με συγκλίνουσα υπακολουθία.

   (ϛ′) Υπάρχει ακολουθία που έχει μια φραγμένη υπακολουθία αλλά δεν έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες.

   (ζ′) Αν μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, τότε είναι μονότονη.

   (η′) Κάθε υπακολουθία αύξουσας ακολουθίας είναι αύξουσα ακολουθία.

   (ϑ′) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον αριθμό a, τότε $a_n \to a$.

   (ι′) Κάθε Cauchy-ακολουθία ρητών αριθμών συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$.

   (ια′) Δεν ισχύει εν γένει ότι $\limsup(a_n + b_n) = \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$.

   (ιβ′) Αν (a_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε $\limsup(a_n) = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\liminf(a_n) = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο μιας γνήσια αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, όπως επίσης και όριο μιας γνήσια αύξουσας ακολουθίας αρρήτων αριθμών. (Θυμηθείτε ότι τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε επίσης στο επιχείρημά σας διαστήματα της μορφής $(x - \frac{1}{n}, x)$, $n \in \mathbb{N}$).

5. Να μελετηθούν οι παρακάτω ακολουθίες ως προς τη σύγκλιση:

   (1) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}(3^n+1) - 2^n}{3^{n+1}\sqrt[n]{6} + 2}$, (2) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n+1}$, (3) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$, (4) $a_n = \sqrt[3]{n^3 - n^2} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}$, (5) $a_n = \min\{\dfrac{\sqrt{n}}{5}, \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\}$, (6) $a_n = \dfrac{w^n}{(1+w)(1+w^2)\cdot \ldots \cdot(1+w^n)}$, όπου $w > 0$, (7) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$, (8) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$, (9) $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$, (10) $a_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$, (11) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}}$, (12) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+7}$, (13) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, (14) $a_n = \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$, (15) $a_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!}$, (16) $a_n = \dfrac{[nw]}{n}$, όπου $w \in \mathbb{R}$, (17) $a_n = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \cdots + \dfrac{9}{10^n}$ (Θέτοντας $0.9999\cdots = \lim a_n$, τί παρατηρείτε;).

6. Να βρεθούν όλες οι τιμές του $w \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ακολουθία $a_n = \left(\frac{1-w^2}{1+w^2}\right)^n$ συγκλίνει.

7. Ισχύει το εξής αποτέλεσμα: *Αν* $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *και* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *τότε* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Να εφαρμόσετε το παραπάνω αποτέλεσμα κατάλληλα για να βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

8. Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ και $b_n > 0$, και $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $c_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$ συγκλίνει στο 0.

9. Να δώσετε παραδείγματα ακολουθιών (a_n), (b_n), $b_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, κάθε μια από τις οποίες τείνει στο $\pm\infty$, αλλά (α) (a_n/b_n) συγκλίνει, (β) (a_n/b_n) τείνει στο $\pm\infty$.

10. Να αποδείξετε ότι αν $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim a_n = 0$ ανν $\lim(1/a_n) = +\infty$.

11. Να αποδείξετε ότι αν $\lim(a_n/n) = L$, όπου $L > 0$, τότε $\lim a_n = +\infty$.

12. Έστω $a > 0$ και $x_1 > 0$. Ορίζουμε $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ για $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $x_n \to \sqrt{a}$. (Υπόδειξη: Για τη λύση θα χρειαστεί να αποδείξετε ότι $x_n^2 \geq a$ για $n \geq 2$).

13. Έστω $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \sqrt{10a_n - 17}$ για $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι η (a_n) συγκλίνει και να βρεθεί το όριο της.

14. Έστω $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim a_n = 2 - \sqrt{3}$.

15. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες $u_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ και $v_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ είναι μονότονες και φραγμένες (άρα συγκλίνουν - Υπενθυμίζουμε ότι $\lim u_n = \lim \sup a_n$ και $\lim v_n = \lim \inf a_n$).

16. Να βρείτε το ανώτερο και κατώτερο όριο των παρακάτω ακολουθιών:

$$\begin{aligned}
x_n &= 2 + (-1)^n(1 + 1/n), \\
y_n &= (2, -1, 3/2, -1/2, 4/3, -1/3, 5/4, -1/4, \ldots), \\
z_n &= \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n+1}, \\
w_n &= n[2 + (-1)^n].
\end{aligned}$$