Φυλλάδιο 4 στον Απειροστικό Λογισμό Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\dfrac{a}{2}$, $a\in\mathbb{R}$.

2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια, και αν ναι, τότε να τα υπολογίσετε:

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{4x-9}$, $\lim\limits_{x\to x_0}[x]$, $\lim\limits_{x\to x_0}(x-[x])$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x.

3. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{sgn}(x))$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\dfrac{1}{x^2})$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1$ αν $x\in\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$ και $f(x)=0$, διαφορετικά. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5. Υποθέτουμε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει όριο L στο 0, και έστω $a>0$. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως $g(x)=f(ax)$ για $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=L$.

6. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$ δεν υπάρχει αλλά το $\lim\limits_{x\to 0}x\cos(1/x)$ υπάρχει.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sgn}\sin(1/x)$, $x\neq 0$ ($x\mapsto\mathrm{sgn}(x)$ είναι η συνάρτηση πρόσημο).

8. Έστω f,g ορισμένες επί του $A\subseteq\mathbb{R}$, και έστω c σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του c και $\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to c}(fg)(x)=0$.

9. Έστω f,g ορισμένες επί του $A\subseteq\mathbb{R}$, και έστω c σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to c}(fg)(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to c}g(x)$;

10. Έστω f,g ορισμένες επί του $A\subseteq\mathbb{R}$, και έστω c σημείο συσσώρευσης του A. Αν τα όρια των $f+g$ και fg υπάρχουν στο c, τότε υπάρχουν τα όρια των f και g στο c;

11. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια, και αν ναι, να τα υπολογίσετε:

    $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq 1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq 1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ $(x>0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$ $(x>0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

12. Υποθέτουμε ότι τα όρια των f και g υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ καθώς $x\to+\infty$ και ότι $f(x)\leq g(x)$ για όλα τα $x\in(a,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leq\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

13. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ όπου $L>0$, και ότι $\lim\limits_{x\to c}g(x)=+\infty$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)=+\infty$. Αν $L=0$, δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αυτό το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει.

14. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to 0^+}f(1/x)=L$.

15. Βρείτε συναρτήσεις f και g ορισμένες επί του $(0,+\infty)$ τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f-g)(x)=0$. Μπορείτε να βρείτε τέτοιες συναρτήσεις με $g(x)>0$ για όλα τα $x\in(0,+\infty)$, τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)/g(x)=0$;

16. Έτσω $f(x) = |x|^{-1/2}$ για $x \neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

17. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x^2}) & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$. Για τα σημεία ασυνέχειας των f, g (αν υπάρχουν) να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας σε κάθε περίπτωση.

18. Έστω $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{αν } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$. Να μελετηθεί η f ως προς την συνέχεια σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ και για τα σημεία ασυνέχειας (αν υπάρχουν) να καθοριστεί το είδος της ασυνέχειας.

19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ είναι συνεχής.

20. Βρείτε τα σημεία συνέχειας των παρακάτω συναρτήσεων: $f(x) = [x]$, $g(x) = x[x]$, $h(x) = [\sin x]$ $(D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R})$, $k(x) = [1/x]$ $(x \neq 0)$.

21. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to \mathbb{R}$, και $g : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in A$ (Λέμε ότι η g είναι ο περιορισμός της f στο A και συμβολίζουμε την g με $f \restriction A$).

    (α) Αν η f είναι συνεχής στο $c \in A$, τότε να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο c.

    (β) Με ένα παράδειγμα, δείξτε ότι αν η g είναι συνεχής στο c, τότε δεν έπεται ότι η f είναι συνεχής στο c.

22. Έστω $K > 0$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}$.

23. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $\mathbb{R}$ και ότι $f(r) = 0$ για κάθε ρητό αριθμό r. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

24. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x$ αν x ρητός και $g(x) = x + 3$ αν x άρρητος. Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η g είναι συνεχής.

25. Έστω $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ για $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Μπορούμε να ορίσουμε το $f(2)$ με τέτοιο τρόπο ώστε η f να είναι συνεχής στο 2;

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq c$ για όλα τα $x \in [a, b]$.

27. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

28. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $[a, b]$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.

29. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $[0, 1]$ και τέτοια ώστε $f(x) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ για όλα τα $x \in [0, 1]$. Τί μπορείτε να πείτε για την f;

30. Έστω $a, b, c > 0$ και $d < e < r$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{a}{x - d} + \dfrac{b}{x - e} + \dfrac{c}{x - r} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διατήματα (d, e) και (e, r).

31. Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο τέτοιο ώστε $a_0 a_n < 0$. Να αποδείξετε ότι το $p(x)$ έχει τουλάχιστον μια θετική πραγματική ρίζα.

32. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής επί του $[a, b]$ και τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για όλα τα $x \in [a, b]$. Τί μπορείτε να πείτε για την f;

33. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς επί του $\mathbb{R}$, και τέτοιες ώστε $f(r) = g(r)$ για όλα τα $r \in \mathbb{Q}$. Ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$;

34. Έστω $g(1) = 0$ και $g(x) = 2$ αν $x \neq 1$, και έστω $f(x) = x + 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g \circ f$ δεν είναι συνεχής στο 0. Γιατί αυτό δεν αντιβαίνει στο θεώρημα περί σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων;

35. Έστω f, g ορισμένες επί του $\mathbb{R}$ και έστω $c \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b$ και η g είναι συνεχής στο b, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to c} (g \circ f)(x) = g(b)$.

36. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 1]$, αλλά η $|f|$ είναι συνεχής επί του $[0, 1]$. (Εργαστείτε με την $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$.)

37. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις επί του $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $E = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$ έχει την ιδιότητα ότι αν (x_n) είναι ακολουθία σημείων του E και $x_n \to x_0$, τότε $x_0 \in E$.

38. Έστω $a < b < c$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής επί του $[a, b]$, η g συνεχής επί του $[b, c]$, και ότι $f(b) = g(b)$. Αν $h(x) = f(x)$ για $x \in [a, b]$ και $h(x) = g(x)$ για $x \in [b, c]$, τότε να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής επί του $[a, c]$.