Φυλλάδιο 5 στον Απειροστικό Λογισμό Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Στατιστικης & Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

1. *Αληθής ή ψευδής;* **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας!**

   (α′) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $x = b$, τότε $f'(b) = 0$.

   (β′) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

   (γ′) Αν η f είναι τέτοια ώστε οι παράγωγοι f' και f'' υπάρχουν στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $c \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(c) = 0$.

   (δ′) Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και έστω $c \in (a, b)$. Αν η f είναι συνεχής στο c, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b)$ με $x \neq c$, και αν $\lim_{x \to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, τότε $f'(c) = L$.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν x ρητός και $f(x) = 0$ αν x άρρητος. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, και να βρεθεί η $f'(0)$.

3. Για κάθε μια από τις επόμενες συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες και βρείτε την παράγωγο: (α) $f(x) = |x| + |x + 1|$, (β) $g(x) = 2x + |x|$, (γ) $h(x) = x|x|$.

4. Δοθέντος ότι η συνάρτηση $h(x) = x^3 + 2x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} επί του $\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $(h^{-1})'(y)$ στα σημεία που αντιστοιχούν στα $x = 0, 1, -1$.

5. Να αποδειχθεί ότι $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Να αποδειχθεί ότι $(x - 1)/x < \ln x < x - 1$ για $x > 1$.

7. Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη επί του I. Αν $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$, τότε να αποδείξετε ότι είτε $f'(x) > 0$ για όλα τα $x \in I$ είτε $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in I$.

8. Να βρεθούν τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των παρακάτω συναρτήσεων στα πεδία ορισμού τους: (α) $f(x) = |x^2 - 1|$ για $x \in [-4, 4]$, (β) $g(x) = x|x^2 - 12|$ για $x \in [-2, 3]$, (γ) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x + 2}$ για $x > 0$, (δ) $k(x) = x^3 - 3x - 4$ για $x \in \mathbb{R}$.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

10. Έστω f, g παραγωγίσιμες επί του $\mathbb{R}$ και έστω ότι $f(0) = g(0)$ και $f'(x) \leq g'(x)$ για όλα τα $x \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \leq g(x)$ για όλα τα $x \geq 0$.

11. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ πραγματικοί αριθμοί και έστω f ορισμένη επί του $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2 \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

    Να βρεθεί το μοναδικό σημείο τοπικού ελαχίστου για την f.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$, αλλά σε κάθε περιοχή του 0 η παράγωγος $f'(x)$ λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. (Επομένως, αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο είναι θετική, αυτό δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει περιοχή του σημείου στην οποία η f είναι αύξουσα.)

13. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ για $x \neq 0$ και $g(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, να αποδείξετε ότι η g' δεν είναι φραγμένη επί του διαστήματος $[-1, 1]$.

14. Έστω $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $L'(x) = 1/x$ για $x > 0$. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των ακόλουθων συναρτήσεων: (α) $f(x) = L(2x + 3)$ για $x > 0$, (β) $g(x) = (L(x^2))^3$ για $x > 0$, (γ) $h(x) = L(ax)$ για $a > 0$, $x > 0$, (δ) $k(x) = L(L(x))$ όταν $L(x) > 0$, $x > 0$.

15. Έστω $f(x) = x^2$ για x ρητό, έστω $f(x) = 0$ για x άρρητο, και έστω $g(x) = \sin x$ για $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$. (Υπόδειξη: Να αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.)

16. Έστω $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ για $x \neq 0$, έστω $f(0) = 0$, και έστω $g(x) = \sin x$ για $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$ αλλά το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ δεν υπάρχει.

17. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: (α) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}$ $(0, \pi/2)$, (β) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x}$ $(0, \pi/2)$, (γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x}$ $(0, \pi/2)$, (δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3}$ $(0, \pi/2)$, (ε) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan} x}{x}$ $(-\infty, \infty)$, (στ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2}$ $(0, 1)$, (ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x$ $(0, \infty)$, (η) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^3}$ $(0, \infty)$, (ϑ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$ $(0, \infty)$, (ι) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 3/x)^x$ $(0, \infty)$, (ϰ) $\lim\limits_{x\to \infty}(1 + 3/x)^x$ $(0, \infty)$, (λ) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{1/x}$ $(0, \infty)$, (μ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ $(0, \infty)$, (ν) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ $(0, \pi)$.

18. Έστω $f(x) = \cos ax$ για $x \in \mathbb{R}$ όπου $a \neq 0$. Βρείτε την $f^{(n)}(x)$ για $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

19. Να αποδείξετε ότι αν $x > 0$, τότε $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, προσεγγίστε τις $\sqrt{1.2}$ και $\sqrt{2}$. Επίσης, να εφαρμόσετε το Θεώρημα Taylor με $n = 2$ για να πετύχετε πιο ακριβείς προσεγγίσεις των $\sqrt{1.2}$ και $\sqrt{2}$.

20. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Χρησιμοποιείστε το πολυώνυμο Taylor του cos για να δείξετε ότι οι λύσεις είναι κατά προσέγγιση $\pm\sqrt{2/3}$.

21. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

    (Καταρχήν, αποδείξτε με επαγωγή ότι η f έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης και $f^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

    Για $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε $F(x) = f(x) - e^x$. Τότε (με επαγωγή) η F έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης και $F^{(n)}(x) = F(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, $F(0) = 0$ και $F^{(n)}(0) = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω I_x το κλειστό διάστημα με άκρα τα $0, x$. Εφόσον η F είναι συνεχής στο I_x, υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|F(t)| \leq K$ για όλα τα $t \in I_x$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor στην F επί του I_x και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $F^{(k)}(0) = F(0) = 0$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $c_n \in I_x$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}x^n \\ &= \frac{F(c_n)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

    Συνεπώς έχουμε

$$|F(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!} \text{ για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

    Εφόσον $\lim\limits_{n\to\infty}(|x|/n!) = 0$, έχουμε ότι $F(x) = 0$. Επειδή το $x \in \mathbb{R}$, με το οποίο ξεκινήσαμε, ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $f(x) = e^x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.)

22. Να λυθούν οι ακόλουθες ασκήσεις από το βιβλίο του Spivak: Κεφ. 19, σελ. 358, **1**, **2(i)**, **2(iv)**, **3(ii)**, **3(v)**.