

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΑΧΜ
9 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015 - ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ (12:00-15:00)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι συναρτήσεις (1) $f_1(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, (2) $f_2(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$ στην f .

ΘΕΜΑ 2. Να μελετηθεί ως προς την σημειακή και ομοιόμορφη σύγκλιση επί του $[0, 1]$ η παρακάτω ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{αν } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{αν } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{αν } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 3. Να αποδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί οποιουδήποτε διαστήματος $[a, b]$, $a < b$, ενώ δεν συγκλίνει απόλυτα για καμία τιμή του x .

ΘΕΜΑ 4. (α) Να βρεθούν τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) x^n.$$

(β) Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Υποθέτουμε ότι

$$f'(x) = -2xf(x), \quad f(0) = 1.$$

Να βρεθούν τα a_n . Αναγνωρίζετε την συνάρτηση f ;

ΘΕΜΑ 5. α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$. Να αποδειχθεί ότι $\vec{x} \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του A τέτοια ώστε $\vec{a}_n \rightarrow \vec{x}$.

β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}$ είναι κλειστό στον (Ευκλείδειο χώρο) $\mathbb{R}^k$.

γ) Έστω $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2

ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ