ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα Μαθηματικων - Κατευθυνση ΣΑΧΜ

8 Ιουνιου 2015 - Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (12:00-15:00)

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω I ένα οποιοδήποτε (μη εκφυλισμένο) διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη επί του I. Αν η f' είναι φραγμένη επί του I, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του I.

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2. Θεωρούμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επί του $[0, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{αν } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n^2(\frac{1}{n} - x) & \text{αν } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{αν } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Να βρεθεί το κατά σημείο όριο της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επί του $[0, 1]$. Επίσης, να εξεταστεί (α) αν γίνεται εναλλαγή ορίου-ολοκληρώματος, (β) αν συγκλίνει ομοιόμορφα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επί του $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να διατυπώσετε το M-τέστ του Weierstraβ και να δώσετε την απόδειξή του.

(β) Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1 + n^5x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να γραφεί η συνάρτηση $f(x) = \arctan(x)$ σαν δυναμοσειρά σε κατάλληλο διάστημα σύγκλισης.

(β) Δίνεται η ακολουθία αριθμών

$$a_n = \begin{cases} n^2 + 1, & \text{αν } n = 3k, k = 0, 1, \ldots \\ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}, & \text{αν } n = 3k + 1, k = 0, 1, \ldots \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{αν } n = 3k + 2, k = 0, 1, \ldots \end{cases}.$$

Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$ της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset (-R, R)$.

ΘΕΜΑ 5. α) Έστω $(\vec{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σημείων του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ η οποία συγκλίνει στο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} ||\vec{x_k}|| = ||\vec{x}||$ και ως εφαρμογή να ελέγξετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για την ακολουθία $\vec{x_k} = (\frac{1}{k+1}, \frac{\ln k}{k})$, $k \in \mathbb{N}$.

β) Έστω $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 μοναδες

ΑΡΙΣΤΑ = 10 μοναδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ