ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "Εισαγωγή στη Συνδυαστική και τις Πιθανότητες"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

28 Ιανουαριου 2019, 12:00–15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να δείξετε ότι $P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) = P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Υποθέτουμε ότι n άτομα βρίσκονται σε ένα δωμάτιο. Αν φτιάξουμε μια λίστα με τα γενέθλιά τους (μήνας και ημέρα του μήνα), ποιά είναι η πιθανότητα τα γενέθλια δύο ή περισσότερο από δύο ατόμων να συμπίπτουν; Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μόνο 365 ημέρες διαθέσιμες για τα γενέθλια ατόμου (αγνοώντας την 29 Φεβρουαρίου) και ότι κάθε μια από αυτές τις ημέρες έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί για τα γενέθλια οποιουδήποτε ατόμου.

(β) Όταν ανοίγουμε έναν τραπεζικό λογαριασμό, η τράπεζα μας δίνει ένα τετραψήφιο κωδικό ασφαλείας (ο οποίος μπορεί να ξεκινά με ένα ή περισσότερα μηδενικά) στη τύχη. Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος και ο πληθάριθμός του; Επίσης, να βρείτε την πιθανότητα του κάθε ενδεχομένου παρακάτω: (1) Κάθε ψηφίο του κωδικού είναι άρτιος, (2) Ο κωδικός δεν έχει επαναλαμβανόμενα ψηφία, (3) Ο κωδικός είναι παλινδρομικός, (4) Κανένα ψηφίο του κωδικού δε ξεπερνά το 6, (5) Το μεγαλύτερο ψηφίο του κωδικού είναι ακριβώς 6, (6) Τα ψηφία του κωδικού είναι σε γνήσια αύξουσα διάταξη.

ΘΕΜΑ 3. Από προηγούμενη εμπειρία με τις νόσους των ασθενών του, ένας γιατρός έχει συλλέξει την παρακάτω πληροφορία: 5% θεωρούν ότι έχουν καρκίνο και πράγματι έχουν, 45% θεωρούν ότι έχουν καρκίνο και δεν έχουν στη πραγματικότητα, 10% θεωρούν ότι δεν έχουν καρκίνο και έχουν στη πραγματικότητα, και τέλος 40% θεωρούν ότι δεν έχουν καρκίνο και πράγματι δεν έχουν. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: ο ασθενής θεωρεί ότι έχει καρκίνο, και B: ο ασθενής έχει καρκίνο. Να βρεθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(B|A)$, $P(B|A^c)$, $P(A|B^c)$, $P(A|B)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

(β) Ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται 3 φορές. Έστω A το ενδεχόμενο ότι έμφανίζεται κεφαλή στη πρώτη ρίψη, έστω B το ενδεχόμενο ότι τουλάχιστον δύο φορές εμφανίζονται γράμματα, και έστω Γ το ενδεχόμενο ότι εμφανίζεται ακριβώς μια φορά κεφαλή ή ότι παίρνουμε γράμματα, κεφαλή, κεφαλή με αυτή τη σειρά. Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$ και ότι $P(X \cap Y) \neq P(X)P(Y)$ για όλα τα $X, Y \in \{A, B, \Gamma\}$ με $X \neq Y$.

(γ) Δείξτε ότι αν τα ενδεχόμενα E_1 και E_2 ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα ενδεχόμενα $(E_1)^c$ και $(E_2)^c$.

ΘΕΜΑ 5. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X με σύνολο τιμών το $\mathbb{N}$, για την οποία υποθέτουμε ότι

$$P(X > x) = \frac{c}{x+1}$$

όπου $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και c είναι μια πραγματική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία