

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “Εισαγωγή στη Συνδυαστική και τις Πιθανότητες”

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΕΙΣ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Σ.Α.Χ.Μ.

4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018, 09:00ΠΜ–12:00ΜΜ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(β) Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Για $A \subseteq \Omega$, ορίζουμε

$$P(A) = \frac{1}{12}(|A \cap \{1, 2, 3, 4\}| + 2|A \cap \{5, 6, 7, 8\}|).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση P είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Ένα άτομο έχει 8 φίλους από τους οποίους θα προσκαλέσει τους 5 σε ένα πάρτι. (1) Πόσες δυνατές επιλογές υπάρχουν αν 2 από τους φίλους δεν θέλουν να παρευρεθούν ταυτόχρονα στο πάρτι; (2) Πόσες δυνατές επιλογές υπάρχουν αν 2 από τους φίλους θα δεχθούν την πρόσκληση μόνο αν παρευρεθούν ταυτόχρονα;

(β) Όταν ανοίγουμε έναν τραπεζικό λογαριασμό, η τράπεζα μας δίνει ένα τετραψήφιο κωδικό ασφαλείας (ο οποίος μπορεί να ξεκινά με ένα ή περισσότερα μηδενικά) στη τύχη. Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος και ο πληθυσμιακός του; Επίσης, να βρείτε την πιθανότητα του κάθε ενδεχομένου παρακάτω: (1) Κάθε ψηφίο του κωδικού είναι άρτιος (2) Ο κωδικός δεν έχει επαναλαμβανόμενα ψηφία (3) Ο κωδικός είναι παλινδρομικός (4) Κανένα ψηφίο του κωδικού δε ξεπερνά το 6 (5) Το μεγαλύτερο ψηφίο του κωδικού είναι ακριβώς 6 (6) Τα ψηφία του κωδικού είναι σε γνήσια αύξουσα διάταξη.

ΘΕΜΑ 3. Ένας απόφοιτος του Τμήματος Μαθηματικών, εισαγ. κατ. ΣΑΧΜ, σκοπεύει να συμμετάσχει στις πρώτες τρεις εξετάσεις αναλογισμού το ερχόμενο καλοκαίρι. Θα συμμετάσχει στη πρώτη εξέταση τον Ιούνιο. Αν επιτύχει στην εξέταση, τότε θα συμμετάσχει στη δεύτερη εξέταση τον Ιούλιο, και αν επιτύχει και σε αυτήν, τότε θα συμμετάσχει και στη τρίτη τον Σεπτέμβριο. Αν αποτύχει σε κάποια εξέταση, τότε δεν του επιτρέπεται η συμμετοχή στις επόμενες εξετάσεις. Η πιθανότητα να επιτύχει στη πρώτη εξέταση είναι 0.9. Αν τα καταφέρει, η δεσμευμένη πιθανότητα να επιτύχει στη δεύτερη εξέταση είναι 0.8. Αν επιτύχει και στις δύο πρώτες εξετάσεις, η δεσμευμένη πιθανότητα να επιτύχει στη τρίτη είναι 0.7. (1) Ποιά είναι η πιθανότητα να επιτύχει και στις τρεις εξετάσεις; (2) Με δεδομένο ότι δεν πέτυχε και στις τρεις εξετάσεις, ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να έχει αποτύχει στη δεύτερη εξέταση;

ΘΕΜΑ 4. (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα κουτί το οποίο περιέχει 4 ετικέτες με επιγραφές 000, 110, 101, 011, αντίστοιχα. Επιλέγουμε μια ετικέτα στη τύχη και ορίζουμε A_i , $i = 1, 2, 3$, να είναι το ενδεχόμενο ότι ένα 0 εμφανίζεται στην i θέση. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ 5. (α) Μας δίνεται μια διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής $F_X(t) = 0$ αν $t < 0$, $1/2$ αν $0 \leq t < 2$, $5/6$ αν $2 \leq t < 3$, και 1 αν $t \geq 3$. Να βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας για την X .

(β) Ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται 4 φορές. Έστω X το πλήθος των περιπτώσεων όπου μια κεφαλή ακολουθείται από μια άλλη κεφαλή στην ακολουθία των ρίψεων. Να βρεθούν η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X , η μέση τιμή και η διακύμανση της X .

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ | ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

Καλή Επιτυχία