ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "Εισαγωγή στη Συνδυαστική και τις Πιθανότητες"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

5 Σεπτεμβριου 2018, 12:00–15:00μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $E_1, \ldots, E_n$ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \geq P(E_1) + \cdots + P(E_n) - (n-1).$$

(β) Έστω ότι ένα πείραμα εκτελείται n φορές. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο E του δειγματικού χώρου, υποθέτουμε ότι το $n(E)$ συμβολίζει το πλήθος των φορών που συμβαίνει το E, και ορίζουμε $f(E) = n(E)/n$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί τα αξιώματα 1, 2, και 3 του μέτρου πιθανότητας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Στο πόκερ μοιράζονται 5 φύλλα (από τα 52) στη τύχη σε κάθε παίκτη. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρει ένας παίκτης: (1) 5 φύλλα που σχηματίζουν κέντα (τα χαρτιά έχουν διαφορετικές διαδοχικές τιμές—ξεκινώντας με άσσο ή 2 ή 3, ..., ή 10—και δεν έχουν όλα το ίδιο χρώμα) (2) 5 φύλλα που σχηματίζουν φουλ (3 χαρτιά με την ίδια αξία (αριθμό ή φιγούρα) και 2 άλλα χαρτιά με την ίδια αξία (διαφορετική από την πρώτη) (3) ένα φλος (και τα 5 χαρτιά έχουν το ίδιο χρώμα) (4) ένα ζεύγος (τα χαρτιά έχουν αξίες a, a, b, c, d, όπου τα a, b, c, d είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους).

(β) Η κυρία X ισχυρίζεται ότι έχει μαντικές ικανότητες. Συγκεκριμένα ισχυρίζεται ότι αν της παρουσιαστούν 8 κάρτες, 4 από τις οποίες είναι κόκκινες και 4 είναι μαύρες, τότε θα αναγνωρίσει σωστά το χρώμα σε τουλάχιστον 6 κάρτες χωρίς να μπορεί να δει τις κάρτες. Αν απλά μαντεύει και δεν έχει κάποια ιδιαίτερη ικανότητα, ποιά είναι η πιθανότητα να αναγνωρίσει σωστά τουλάχιστον 6 από τις 8 κάρτες; (Θα αναγνωρίσει 4 από τις κάρτες ως κόκκινες και 4 από τις κάρτες ως μαύρες.) Αποφασίζουμε αυθαίρετα να της παρουσιάσουμε πρώτα τις 4 κόκκινες κάρτες, μια προς μια, και μετά τις 4 μαύρες κάρτες.

ΘΕΜΑ 3. Αν ένα πλοίο βρίσκεται σε κάποια περιοχή, ένα ραντάρ καταγράφει σωστά την παρουσία του με πιθανότητα 0.99. Αν δεν βρίσκεται στην περιοχή, το ραντάρ καταγράφει λανθασμένα την παρουσία του με πιθανότητα 0.10. Υποθέτουμε ότι ένα πλοίο είναι παρόν με πιθανότητα 0.05. Ποιά είναι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (λανθασμένη ένδειξη παρουσίας πλοίου) και ποιά η πιθανότητα έλλειψης ανίχνευσης (καμία ανίχνευση δεν γίνεται, παρόλο που το πλοίο είναι παρόν); Ποιά είναι η πιθανότητα ένα πλοίο να είναι παρόν δοθέντος ότι το ραντάρ καταγράφει την παρουσία ενός πλοίου;

ΘΕΜΑ 4. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι ανεξάρτητα και ότι $P(A_3 \cap A_4) > 0$. Να αποδείξετε ότι

$$P(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2).$$

ΘΕΜΑ 5. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 15 άτομα τα οποία έχουν την ίδια ηλικία και κατάσταση υγείας. Από τα παλαιότερα δεδομένα που έχει συλλέξει η εταιρεία, έχει εκτιμηθεί ότι κάθε άτομο της παραπάνω κατηγορίας έχει πιθανότητα 70% να ζει μετά από 20 χρόνια. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα μετά από 20 χρόνια (1) να ζουν και οι 15 ασφαλισμένοι; (2) να μη ζει ούτε ένας από τους 15 ασφαλισμένους; (β) Αν κάθε ασφαλισμένος που ζει μετά από 20 χρόνια λαμβάνει αποζημίωση 10000€, ποιό είναι το ποσό που αναμένεται να κληθεί να πληρώσει τότε η ασφαλιστική εταιρεία; Ποιά είναι η διακύμανση για την συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει η εταιρεία; (Υπόδειξη: Αρχικά, να θέσετε ως X το πλήθος των ασφαλισμένων που ζουν μετά από 20 χρόνια, και να αιτιολογήσετε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.)

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία