Τελικη Εξεταση στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
18 Φεβρουαριου 2011
Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω οι πίνακες $A = (x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n)$, $B = (y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ Να εξετάσετε αν το σύστημα $A^{\mathbf{t}}Bz^{\mathbf{t}} = \mathrm{O}_{n\times 1}$, όπου $z = (z_1 \; z_2 \; \ldots \; z_n)$ ο $1 \times n$ πίνακας των αγνώστων, έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(β) Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_n$ συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ οι οποίες είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμες. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έστω ο πίνακας

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\det(W(x_0)) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ η συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με $\mathbf{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $a_i = 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

(β) Έστω $V(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο πίνακας $(V(x))^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και να γραφεί - αν είναι δυνατόν - κάθε τέτοιος πίνακας ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ΘΕΜΑ 3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $B = 3A^{2005} - 6A + I_3$.

ΘΕΜΑ 4. Να βρεθεί για ποιές τιμές των παραμέτρων $k, m \in \mathbb{R}$, το σύστημα

$$\begin{aligned} x + \;\; y + z &= 1 \\ x + ky + kz &= m \\ x + k^2 y + 2kz &= km \end{aligned}$$

α) έχει μοναδική λύση και να δοθεί αυτή η λύση,
β) είναι αδύνατο,
γ) έχει άπειρο πλήθος λύσεων και σε κάθε περίπτωση να δοθεί η γενική μορφή των λύσεων αυτών.

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογίσετε τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ αν τα διανύσματα $(1, 1, 1)$ και $(1, 0, -1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ.
ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΟ ΓΡΑΠΤΟ ΣΑΣ ΠΑΡΑΔΙΔΕΤΕ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΧΕΙΡΑ.
ΣΤΑ ΠΡΟΧΕΙΡΑ ΑΝΑΓΡΑΨΑΤΕ ΤΟ ΟΝΟΜΑ ΣΑΣ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΩΔΙΚΟ ΣΑΣ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.