Τελικη Εξεταση στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
18 Φεβρουαριου 2011
Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω οι πίνακες $A = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, $B = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ Να εξετάσετε αν το σύστημα $A^{\mathbf{t}}Bz^{\mathbf{t}} = \mathrm{O}_{n\times 1}$, όπου $z = (z_1\ z_2\ \ldots\ z_n)$ ο $1 \times n$ πίνακας των αγνώστων, έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$A^{\mathbf{t}}B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς,

$$\det(A^{\mathbf{t}}B) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) \cdot 0 = 0.$$

Άρα, ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του δοθέντος ομογενούς συστήματος είναι μη-αντιστρέψιμος, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. $\square$

(β) Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_n$ συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ οι οποίες είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμες. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έστω ο πίνακας

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\det(W(x_0)) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ η συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με $\mathbf{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $a_i = 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.

Λύση. Εφόσον $a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n = \mathbf{0}$, αυτό σημαίνει ότι $a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\cdots+a_nf_n(x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $a_1f_1^{(i)}(x) + a_2f_2^{(i)}(x) + \cdots + a_nf_n^{(i)}(x) = 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n-1$ και όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\begin{aligned} a_1f_1(x_0) + a_2f_2(x_0) + \cdots + a_nf_n(x_0) &= 0 \\ a_1f_1'(x_0) + a_2f_2'(x_0) + \cdots + a_nf_n'(x_0) &= 0 \\ \ldots &= 0 \\ a_1f_1^{(n-1)}(x_0) + a_2f_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + a_nf_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$W(x_0)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον, $W(x_0)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας (λόγω υπόθεσης), το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους τα a_1, a_2, ..., a_n έχει μοναδική λύση την τετριμένη, συνεπώς $a_i = 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$, όπως το θέλαμε. □

ΘΕΜΑ 2. (α) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Λύση. Βλ. Σημειώσεις. □

(β) Έστω $V(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο πίνακας $(V(x))^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και να γραφεί - αν είναι δυνατόν - κάθε τέτοιος πίνακας ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Με επαγωγή αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$(V(x))^n = \begin{pmatrix} e^{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $(V(x))^n$ είναι αντιστρέψιμος διότι $\det(((V(x)^n)) = e^{nx} \neq 0$. Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι:

$$(V(x))^n \overset{r_1 \to \frac{1}{e^{nx}} r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2 \to r_2 - (nx) r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Θέτουμε $e_1 = r_1 \to \frac{1}{e^{nx}} r_1$, $E_1 = e_1(I_3)$, $e_2 = r_2 \to r_2 - (nx) r_3$ και $E_2 = e_2(I_3)$. Τότε

$$I_3 = E_2 E_1((V(x))^n,$$

άρα $((V(x))^n = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1}$. Έχουμε: $(E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $(E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

ΘΕΜΑ 3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $B = 3A^{2005} - 6A + I_3$.

Λύση. Βλ. Σημειώσεις. □

ΘΕΜΑ 4. Να βρεθεί για ποιές τιμές των παραμέτρων $k, m \in \mathbb{R}$, το σύστημα

$$\begin{aligned} x + \ \ y + z &= 1 \\ x + ky + kz &= m \\ x + k^2 y + 2kz &= km \end{aligned}$$

α) έχει μοναδική λύση και να δοθεί αυτή η λύση,
β) είναι αδύνατο,
γ) έχει άπειρο πλήθος λύσεων και σε κάθε περίπτωση να δοθεί η γενική μορφή των λύσεων αυτών.

Λύση. Βλ. Σημειώσεις (Μοναδική λύση αν $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ και $m \in \mathbb{R}$ – Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων. Καμία λύση αν ($k = 0$ και $m \neq 0$) ή ($k = 1$ και $m \neq 1$) ή ($k = 2$ και $m \neq 2$). Άπειρο πλήθος λύσεων αν ($k = 0$ και $m = 0$) ή ($k = 1$ και $m = 1$) ή ($k = 2$ και $m = 2$)). □

ΘΕΜΑ 5. Να υπολογίσετε τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ αν τα διανύσματα $(1, 1, 1)$ και $(1, 0, -1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A. Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Λύση. Βλ. Σημειώσεις. □