ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ (10/02/2012) ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$ ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος. Να βρεθεί για ποιές τιμές των a, b το σύστημα έχει (α) μοναδική λύση (να δοθεί σε κάθε περίπτωση), (β) άπειρο πλήθος λύσεων (να δοθούν σε κάθε περίπτωση) και (γ) καμία λύση. Επίσης, για όλες τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο βαθμός του δοθέντος πίνακα.

Λύση. Συμβολίζουμε τον δοθέντα 3×4 πίνακα με $A_{(a,b)}$ και τον βαθμό του με $r(A_{(a,b)})$.

Αν $a = 0$, τότε $A_{(0,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to (1/4) r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3 \to (r_3 - 2r_1)]{r_2 \to (r_2 - br_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$.

Αν $b \neq 2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν $b = 2$, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, το δε σύνολο λύσεων είναι: $S_{(a=0,b=2)} = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Επίσης, είναι άμεσο να δούμε ότι $r(A_{(a=0,b\neq 2)}) = 2$ και $r(A_{(a=0,b=2)}) = 1$.

Τώρα, αν $a \neq 0$, έχουμε:

$$A_{(a,b)} \xrightarrow{r_1 \to (1/a) r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/a & 2/a \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to (r_2 - ar_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/a & 2/a \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to (1/a) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/a & 2/a \\ 0 & 1 & (4-b)/a & 2/a \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to (r_3 - ar_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/a & 2/a \\ 0 & 1 & (4-b)/a & 2/a \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{pmatrix}$$

Αν $b = 2$, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, το δε σύνολο λύσεων είναι $S_{(a\neq 0,b=2)} = \{(\frac{2}{a}(1-z), \frac{2}{a}(1-z), z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Αν $b \neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, της μορφής $(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1)$.

Επίσης, $r(A_{(a\neq 0,b=2)}) = 2$ και $r(A_{(a\neq 0,b\neq 2)}) = 3$.

Συνοψίζοντας, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

1. $a = 0$, $b \neq 2$: Το σύστημα είναι αδύνατο και $r(A_{(a=0,b\neq 2)}) = 2$.
2. $a = 0$, $b = 2$: Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x, y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Επίσης, $r(A_{(a=0,b=2)}) = 1$.
3. $a \neq 0$, $b = 2$: Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(\frac{2}{a}(1-z), \frac{2}{a}(1-z), z)$, $z \in \mathbb{R}$. Επίσης, $r(A_{(a\neq 0,b=2)}) = 2$.
4. $a \neq 0$, $b \neq 2$: Το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής $(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1)$. Επίσης, $r(A_{(a\neq 0,b\neq 2)}) = 3$.

□

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω J_n ο $n \times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου ισούται με 1. Να αποδείξετε ότι αν $n > 1$, τότε $(I - J_n)^{-1} = I - \dfrac{1}{n-1} J_n$, όπου I είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας.

(β) Να δοθεί ο ορισμός του $\mathrm{adj}(A)$ ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $\mathrm{adj}(A)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $[\mathrm{adj}(A)]^{-1} = \mathrm{adj}(A^{-1})$.

Λύση. (α) Από τις παραδόσεις, γνωρίζουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι $(I - J_n)(I - \frac{1}{n-1}J_n) = I$.
Έχουμε: $(I - J_n)(I - \frac{1}{n-1}J_n) = I - \frac{1}{n-1}J_n - J_n + \frac{1}{n-1}J_n^2 = I - \left(\frac{n}{n-1}\right)J_n + \frac{1}{n-1}J_n^2$.

Είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι $J_n^2 = nJ_n$, άρα $\frac{1}{n-1}J_n^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)J_n$, και συνεπώς $(I - J_n)(I - \frac{1}{n-1}J_n) = I$ όπως το θέλαμε.

(β) Για τον ορισμό του $\mathrm{adj}(A)$, βλ. σημειώσεις. Έστω τώρα ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας A. Από την σχέση $\mathrm{adj}(A) \cdot A = (\det(A))I_n$, έπεται ότι $\mathrm{adj}(A) = (\det(A))A^{-1}$. Επομένως, $\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^n \det(A^{-1}) = (\det(A))^n \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1} \neq 0$, εφόσον $\det(A) \neq 0$. Άρα ο $\mathrm{adj}(A)$ είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα, $\mathrm{adj}(A^{-1}) \cdot A^{-1} = (\det(A^{-1}))I_n$, συνεπώς $\mathrm{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A$, διότι $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Έχουμε:

$$\mathrm{adj}(A) \cdot \mathrm{adj}(A^{-1}) = \mathrm{adj}(A) \cdot \left[\frac{1}{\det(A)}A\right] = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{adj}(A) \cdot A) = \frac{1}{\det(A)}[(\det(A))I_n] = I_n.$$

Άρα, $[\mathrm{adj}(A)]^{-1} = \mathrm{adj}(A^{-1})$. □

ΘΕΜΑ 3. (α) Χωρίς να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες (δηλαδή με αναπτύγματα), να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(β) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του A ισούται με 0. Να αποδείξετε ότι $\det(A) = 0$.

Λύση. (α) Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα είτε χρησιμοποιώντας άμεσα την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις στήλες είτε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα που λέει ότι η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει αν σε στήλη προσθέσουμε το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης στήλης.

Έχουμε: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} \overset{c_2 \to c_2 - tc_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} \overset{c_3 \to c_3 - sc_1 - rc_2}{=}$
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ διότι $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = \det(A^t)$.

(β) Έστω $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$. Έστω $B = (b_{ij})$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A εκτελώντας τον μετασχηματισμό στηλών $c_1 \to (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$ επί του A. Τότε $\det(B) = \det(A)$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, $b_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$ (διότι από την υπόθεση, για κάθε i, το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής του A είναι ίσο με 0). Συνεπώς, η πρώτη στήλη του B είναι μηδενική και άρα, $\det(A) = \det(B) = 0$.

Ένας **δεύτερος τρόπος** απόδειξης είναι ο εξής: Έστω S ο $n \times 1$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Τότε από την υπόθεση έπεται ότι $AS = 0$, όπου 0 είναι ο $n \times 1$ μηδενικός πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι το $n \times n$ ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις (η S είναι μία από αυτές), οπότε $\det(A) = 0$. □

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A, οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι και το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο A^{-1} χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, το οποίο και να διατυπώσετε.

(β) Να αποδείξετε ότι αν $C, D \in M_n(\mathbb{R})$ και ο C είναι αντιστρέψιμος, τότε οι πίνακες CD και DC έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Λύση. (α) Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\det(A - xI_3) = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x-1)^2(x+1)$. Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή) και $\lambda_2 = -1$. Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 είναι ακριβώς οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A - I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ με αγνώστους τα x_1, x_2 και x_3. Ο δε ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδοτιμή 1 είναι το σύνολο λύσεων του παραπάνω ομογενούς συστήματος. Εύκολα παίρνουμε ότι $V(1) = \{(x, y, -x - 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ και αντίστοιχα, $V(-1) = \{(0, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι είτε το $p_1(x) = (x-1)(x+1)$ είτε το $p_2(x) = (x-1)^2(x+1)$. Επειδή $p_1(A) = (A - I_3)(A + I_3) = 0_{3\times 3}$, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $p_1(x)$.

Τώρα, ο A είναι αντιστρέψιμος διότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A. Βρίσκουμε (μια έκφραση για) τον A^{-1}. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, $-A^3 + A^2 + A - I_3 = 0_{3\times 3} \Rightarrow -A^3 + A^2 + A = I_3 \Rightarrow (-A^2 + A + I_3)A = I_3 \Rightarrow A^{-1} = -A^2 + A + I_3$.

(β) Έχουμε: $\det(CD - xI_n) = \det(CD - x(CC^{-1})) = \det(C(D - xC^{-1})) = \det(C)\det(D - xC^{-1})$.

Επίσης, $\det(DC - xI_n) = \det(DC - x(C^{-1}C)) = \det((D - xC^{-1})C) = \det(D - xC^{-1})\det(C) = \det(C)\det(D - xC^{-1})$.

Άρα, $\det(CD - xI_n) = \det(DC - xI_n)$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. $\square$

ΘΕΜΑ 5. *ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ* ; **Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας, είτε με απόδειξη, είτε με αντιπαράδειγμα, είτε με λεπτομερή αναφορά σε πεδίο της θεωρίας.**

(α) Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A, τότε ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην λ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην λ.

(β) Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι οι ίδιες με τις ιδιοτιμές του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα του A.

(γ) Αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A, τότε καμιά από τις στήλες του A δεν γράφεται ως άθροισμα κατάλληλων πολλαπλασίων των υπολοίπων στηλών του A.

(δ) Αν $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ και I είναι ο ταυτοτικός πίνακας, τότε $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(ε) Αν $AB = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος δεν είναι αντιστρέψιμος.

(στ) Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε $(A^n)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

(ζ) Αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα ενός γραμμικού συστήματος έχει μια μηδενική γραμμή, τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση. (α) Ψευδές: Ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda I_n)X = 0$, συνεπώς περιλαμβάνει την μηδενική λύση. Τα ιδιοδιανύσματα είναι οι **μη-μηδενικές** λύσεις του παραπάνω ομογενούς συστήματος. Άρα, από την διατύπωση του (α), ο $V(\lambda)$ δεν περιέχει την μηδενική λύση, το οποίο είναι εσφαλμένο.

(β) Ψευδές: Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = 2$ (διπλή). Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A είναι ο I_2 (ο 2×2 ταυτοτικός). Οι ιδιοτιμές του I_2 είναι $\mu = 1$ (διπλή).

(γ) Αληθές: Έστω $A = (c_1\, c_2 \ldots c_n) \in M_n(\mathbb{R})$, όπου c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, οι στήλες του A. Αφού το

0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, ο A είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $\det(A) \neq 0$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι για κάποιο i, $1 \leq i \leq n$, $c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j c_j$. Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις στήλες και το γεγονός ότι αν κάποια στήλη ισούται με το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης στήλης, τότε η ορίζουσα ισούται με μηδέν, έχουμε $\det(A) = \det((c_1\, c_2 \ldots c_i \ldots c_n)) = \det((c_1\, c_2 \ldots \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j c_j \ldots c_n)) = 0$. Άτοπο, άρα η (γ) είναι αληθής.

(δ) Ψευδές: $p(I)$ είναι πίνακας και **όχι** αριθμός. Συγκεκριμένα,
$p(I) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot I + a_2 \cdot I^2 + \cdots + a_n \cdot I^n = a_0 \cdot I + a_1 \cdot I + a_2 \cdot I + \cdots + a_n \cdot I = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot I = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} a_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{n} a_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{i=0}^{n} a_i \end{pmatrix}$.

(ε) Ψευδές: Θεωρήστε $A = 0_{2\times 2}$, $B = I_2$, $\Gamma = 0_{2\times 2}$. Τότε $AB = \Gamma$, A, Γ είναι μη αντιστρέψιμοι, όμως ο B είναι αντιστρέψιμος.

(στ) Αληθές: Με επαγωγή στο n. Προφανώς, η σχέση $(A^n)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^n$, ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι $(A^m)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^m$, για κάθε θετικό ακέραιο $m < n$, και θα αποδείξουμε ότι $(A^n)^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^n$.
Έχουμε: $(A^n)^{\mathbf{t}} = (A^{n-1}A)^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^{n-1})^{\mathbf{t}} = A^{\mathbf{t}}(A^{\mathbf{t}})^{n-1} = (A^{\mathbf{t}})^n$, όπου $(A^{n-1})^{\mathbf{t}} = (A^{\mathbf{t}})^{n-1}$ ισχύει από την υπόθεση της επαγωγής.

(ζ) Ψευδές: Έστω ένα 3×3 γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to (r_3 - 2r_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to (r_1 - 2r_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος έχει μια μηδενική γραμμή, όμως το σύστημα είναι αδύνατο.

Ένα ακόμη παράδειγμα: Έστω ένα 3×2 γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to (r_3 - 2r_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος έχει μια μηδενική γραμμή, όμως το σύστημα έχει μοναδική λύση. $\square$