ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα ΣΑΧΜ

28 Μαΐου 2012

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (18:00 – 21:00)

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (1) **[1 ΜΟΝ.]** Έστω U και W οι εξής υποχώροι του $\mathbb{R}^4$: $U = \{(a,b,c,d) : b+c+d = 0\}$, $W = \{(a,b,c,d) : a+b = 0, c = 2d\}$. Να βρείτε την διάσταση και μια βάση των (α) U, (β) W, (γ) $U \cap W$, (δ) $U + W$. Επιπλέον, για τον υποχώρο W να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση (υποθέτουμε ότι ο $\mathbb{R}^4$ είναι εφοδιασμένος με το στάνταρντ εσωτερικό γινόμενο), η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

(2) **[1 ΜΟΝ.]** Έστω U και W δύο διαφορετικοί μεταξύ τους υποχώροι διάστασης 4 ενός $\mathbb{R}$-χώρου V διάστασης 6. Να βρεθούν οι πιθανές διαστάσεις του $U \cap W$.

ΘΕΜΑ 2. (1) **[1 ΜΟΝ.]** Να βρείτε ένα ομογενές σύστημα του οποίου ο χώρος λύσεων παράγεται από το σύνολο $\{(1,-2,0,3),(1,-1,-1,4),(1,0,-2,5)\}$.

(2) **[1 ΜΟΝ.]** Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ και έστω $\beta = \{f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,0,0)\}$. Να αποδείξετε ότι (i) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, (ii) β είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$, και (iii) να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την β. Είναι ο T αντιστρέψιμος; Αν ναι, ποιός είναι ο T^{-1};

ΘΕΜΑ 3. (1) **[0.5 ΜΟΝ.]** Να αποδείξετε ότι ο χώρος $P(\mathbb{R})$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης. Επιπλέον, αν $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός με τύπο $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, τότε να αποδείξετε ότι ο T είναι 1-1, αλλά όχι επί.

(2) **[1 ΜΟΝ.]** Να βρεθεί ο τύπος του γραμμικού τελεστή T επί του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος είναι συμμετρία ως προς την ευθεία $y = 2x$.

(3) Έστω W ο χώρος που παράγεται από τα πολυώνυμα $p_1 = x^3-2x^2+4x+1$, $p_2 = 2x^3-3x^2+9x-1$, $p_3 = x^3+6x-5$, $p_4 = 2x^3-5x^2+7x+5$ και έστω β η στάνταρντ βάση του $P_3(\mathbb{R})$.

(α) **[0.5 ΜΟΝ.]** Να αποδειχθεί ότι η $T : W \to \mathbb{R}^4$ με $T(w) = [w]_\beta$, $\forall w \in W$, είναι ισομορφισμός από τον W επί του $\mathrm{Im}(T)$.

(β) **[1 ΜΟΝ.]** Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το (α), να βρείτε μια βάση του W, η οποία περιέχεται στο σύνολο $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ και την διάσταση του W.

ΘΕΜΑ 4. (α) **[1 ΜΟΝ.]** Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ με $T(a,b,c) = (-2b-3c, a+3b+3c, c)$. Να βρείτε μια βάση β του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε ο πίνακας $(T)_\beta$ να είναι διαγώνιος.

(β) **[0.5 ΜΟΝ.]** Να βρεθούν όλες οι δυνατές κανονικές μορφές Jordan ενός πίνακα A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x-7)^5$.

ΘΕΜΑ 5. (α) **[1 ΜΟΝ.]** Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ δύο όμοιοι πίνακες. Να αποδείξετε ότι $r(A) = r(B)$. Να εφαρμόσετε το αποτέλεσμα αυτό για να αποδείξετε οτι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας, τότε ο βαθμός του A ισούται με το πλήθος των μη-μηδενικών ιδιοτιμών του A.

(β) **[0.5 ΜΟΝ.]** Έστω V, W δύο $\mathbb{R}$-χώροι και T, S δύο μη-μηδενικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί από τον V στον W. Αν $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Im}(S) = \{0_W\}$, τότε να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{T, S\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{L}(V, W)$.

ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ