ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα ΣΑΧΜ

14 Φεβρουαριου 2013

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (15:00 – 18:00)

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $V = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό επί του V ως εξής: $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1)$ και $k(x, 1) = (k^2 x, 1)$. Να εξετάσετε αν το V είναι $\mathbb{R}$-χώρος.

(β) Έστω $V = M_2(\mathbb{R})$ και έστω $W_1 = \{A \in V : A^t = A\}$ και $W_2 = \{A \in V : A^t = -A\}$. Να αποδειχθεί ότι W_1 και W_2 είναι υποχώροι του V και ότι $V = W_1 + W_2$.

(γ) Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, δείξτε ότι η ένωση δύο υποχώρων ενός $\mathbb{R}$-χώρου V μπορεί να μην είναι υποχώρος του V.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνονται τα διανύσματα: $u_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $u_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$, $u_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$, $u_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$. Να βρεθεί μια βάση του χώρου $W = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, η οποία περιέχεται στο σύνολο $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(β) Έστω $S : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ με $S(f)(x) = f'(x)$ και έστω $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ με $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Να βρεθεί ο πίνακας $(S \circ T)_{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{B}$ η συνήθης βάση του $P_2(\mathbb{R})$. Επίσης, να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $S \circ T$.

ΘΕΜΑ 3. *Σωστό ή λάθος;* **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας!**

(α) Αν $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, τότε T_A είναι γραμμικός μετασχηματισμός από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^n$.

(β) Υπάρχει ακριβώς ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε $T(-u) = -T(u)$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}^n$.

(γ) Υπάρχει ακριβώς ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε $T(u+v) = T(u-v)$ για όλα τα $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(δ) Αν $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, τότε $T(u) = u + b$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathbb{R}^n$.

(ε) Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ του $\mathbb{R}^2$ στη βάση $\mathcal{B}' = \{(2, 4), (3, 1)\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι ο $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $T \in L(\mathbb{R}^2)$ τέτοιος ώστε $T(1, 2) = (1, 2)$ και $T(-2, 1) = (2, -1)$. Να βρεθεί ο T και να εξεταστεί αν είναι ισομορφισμός επί του $\mathbb{R}^2$.

ΘΕΜΑ 5. Έστω $T \in L(\mathbb{R}^3)$ με $T((x, y, z)) = (-2z, x+2y+z, x+3z)$. Να βρεθεί ο πίνακας $[(T)_{\mathcal{B}}]^{1000}$, όπου $\mathcal{B}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$. **Να αιτιολογήσετε κάθε ισχυρισμό που θα κάνετε!**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.