Προαιρετικη Προοδος στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
18 Ιανουαριου 2012
Διαρκεια εξετασης: 2 ωρες (16:00-18:00)
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Δίνονται τα σημεία του επιπέδου: (1,3), (2,-2), (3,-5), (4,0). Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού το πολύ 3, του οποίου η γραφική παράσταση διέρχεται από τα παραπάνω 4 σημεία. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $p(x)$ είναι μοναδικό με την παραπάνω ιδιότητα.

(β) Για ποιές τιμές του a έχει το παρακάτω σύστημα μοναδική λύση; καμία λύση; άπειρο πλήθος λύσεων;

$$\begin{aligned} x + \quad y + z &= 4 \\ (a^2-4)z &= a-2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

(γ) Έστω X_1 και X_2 δύο διαφορετικές λύσεις ενός γραμμικού συστήματος $AX = B$. Τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων διότι: (1) $\forall k \in \mathbb{R}$, $(1+k)X_1 - kX_2$ είναι λύση του συστήματος και (2) το σύνολο $S = \{(1+k)X_1 - kX_2 : k \in \mathbb{R}\}$ είναι άπειρο. Να αποδείξετε τους ισχυρισμούς (1) και (2). Τι συμπεραίνετε από το παραπάνω;

ΘΕΜΑ 2. (α) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του. **Να μην υπολογιστεί ο A και να χρησιμοποιηθούν μόνο στοιχειώδεις πίνακες.**

(β) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και έστω $B \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, ο $I_n + BA^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 3. (α) Χωρίς να υπολογιστούν (με αναπτύγματα) οι παρακάτω ορίζουσες, να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(β) Ποιό είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών που μπορεί να έχει ένας 4×4 αντιστρέψιμος πίνακας; **Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

ΘΕΜΑ 4. *Σωστό ή λάθος* ; **Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

(α) Αν το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση, τότε και το γραμμικό σύστημα $AX = C$ πρέπει να έχει μοναδική λύση.

(β) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών A έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αν και μόνο αν, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα ο οποίος περιέχει στήλη χωρίς ηγετικό στοιχείο.

(γ) Αν $AB = BA$, τότε αναγκαστικά ισχύει ότι $A = B$.

(δ) Αν για τον τετραγωνικό πίνακα A, $A^2 = A$, τότε ο $2A - I$ είναι αντιστρέψιμος.

(ε) Αν ο A έχει μια μηδενική γραμμή, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $\mathrm{adj}(A)$.

(στ) Αν ο A είναι $n \times n$ και ο B προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή του A επί το νούμερο της γραμμής, τότε $\det(B) = \frac{n(n+1)}{2}\det(A)$.

(ζ) Αν οι A, B είναι $n \times n$ και $\det(A) = \det(B)$, τότε $\det(A) = \frac{1}{2}\det(A+B)$.

(η) Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας A τ.ω. ο $\mathrm{adj}(A)$ είναι αντιστρέψιμος και ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.