

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ - ΤΜΗΜΑ ΣΑΧΜ
3 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2011

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1 (2 μον.). Να βρεθεί για ποιές τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$, το σύστημα

$$\begin{aligned} kx + y + z &= k \\ x + ky + z &= k \\ x + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

α) έχει μοναδική λύση και να δοθεί η μορφή της λύσης σε κάθε περίπτωση, β) είναι αδύνατο, γ) έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΘΕΜΑ 2 (2 μον.). Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μον.). (α) Έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ο πίνακας για τον οποίο $a_{ii} = \kappa + \lambda$ και $a_{ij} = \lambda$ για $i \neq j$. Να υπολογισθεί η $\det(A)$.

(β) Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t)$ όπου η συνάρτηση $x_2(t)$ ορίζεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + tx_2 + t^2x_3 &= t^4 \\ t^2x_1 + x_2 + tx_3 &= t^3 \\ tx_1 + t^2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

.

ΘΕΜΑ 4 (1 μον.). Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι

$$A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = \mathbf{I}_2.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) (0.5 μον.) Να αποδειχθεί ότι αν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή ενός στοιχειώδους πίνακα, τότε $\lambda \neq 0$.

(β) (1 μον.) Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $A^3 = A$. Να αποδειχθεί ότι το φάσμα του A περιέχεται στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$.

(γ) (1.5 μον.) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν:

(γ₁) Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A καθώς επίσης και το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

(γ₂) Τρία ιδιοδιανύσματα v_1, v_2, v_3 του A τέτοια ώστε αν $P = (v_1^t, v_2^t, v_3^t)$ (δηλαδή ο P είναι ο πίνακας που έχει ως πρώτη στήλη τις συντεταγμένες του v_1 , ως δεύτερη στήλη τις συντ/νες του v_2 κ.ο.κ.), τότε ο P να είναι αντιστρέψιμος. Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό $P^{-1}AP$ τι παρατηρείτε;

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!