ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα ΣΑΧΜ
20 Σεπτεμβριου 2012
Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (18:00 – 21:00)
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) **[1M]** Έστω U και W οι υποχώροι του $\mathbb{R}^4$ οι οποίοι παράγονται από τα σύνολα $\{(1,1,0,-1),\ (1,2,3,0),\ (2,3,3,-1)\}$ και $\{(1,2,2,-2),\ (2,3,2,-3),\ (1,3,4,-3)\}$, αντίστοιχα. Να βρεθούν οι διαστάσεις $\dim(U+W)$ και $\dim(U\cap W)$.

(β) **[1M]** Έστω V ο $\mathbb{R}$-χώρος όλων των 2×2 συμμετρικών πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$. Να βρεθεί η διάσταση του V.

ΘΕΜΑ 2. (α) **[1M]** Έστω $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με $T(x_1,x_2)=(x_1-x_2,\ x_1,\ 2x_1+x_2)$. Έστω $A=\{(1,2),(2,3)\}$ και $B=\{(1,1,0),(0,1,1),(2,2,3)\}$. Να αποδείξετε ότι $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, ότι τα σύνολα A και B είναι βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα, και να βρείτε τον πίνακα ${}_A(T)_B$. Επιπλέον, να βρεθεί ο πυρήνας του T.

(β) **[1M]** Να βρεθεί γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ του οποίου η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα $(1,2,0,-4)$, $(2,0,-1,-3)$. Επίσης, να επεκταθεί μια βάση του $\mathrm{Im}(T)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

ΘΕΜΑ 3. **[2M]** Να βρεθεί $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ έτσι ώστε $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Im}(T)$. Είναι δυνατόν να βρείτε αντιστρέψιμο $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ με την παραπάνω ιδιότητα;

ΘΕΜΑ 4. (α) **[1M]** Δίδονται οι εξής γραμμικοί μετασχηματισμοί: $T\in\mathcal{L}(P_2(\mathbb{R}))$ με $T(f)=f'$ (η παράγωγος της f), και $S\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ με $S(x,y,z)=(4x+z,\ 2x+3y+2z,\ x+4z)$. Να εξεταστεί αν οι T, S είναι διαγωνοποιήσιμοι.

(β) **[1M] Αληθές ή ψευδές; Απαιτείται Πλήρης Δικαιολόγηση!**

- (i) Αν ο $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε ο A^k είναι διαγωνοποιήσιμος για κάθε $k\in\mathbb{N}$.
- (ii) Αν ο $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- (iii) Αν κάθε ιδιοτιμή ενός πίνακα $A\in M_n(\mathbb{R})$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (iv) Αν ο $A\in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής ισούται με 1.

ΘΕΜΑ 5. (α) **[0.5M]** Να αποδείξετε ότι ένα ορθογώνιο υποσύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων, ενός χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(β) **[1.5M]** Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^3$ με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Ο υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $u_1=(1,0,-1)$ και $u_2=(3,1,0)$ είναι ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε το διάνυσμα $w=(1,2,3)$ στην μορφή $w=w_1+w_2$, όπου το w_1 ανήκει στο (παραπάνω) επίπεδο και το w_2 είναι κάθετο στο επίπεδο.

ΑΡΙΣΤΑ = ΔΕΚΑ (10) ΜΟΝΑΔΕΣ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!