ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

7 Ιουνιου 2016, 12:00μμ–15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Ποιά από τα παρακάτω V είναι $\mathbb{R}$-χώροι; (α) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$, με τις συνήθεις πράξεις στον $\mathbb{R}^2$ (β) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| = |y|\}$, με τις συνήθεις πράξεις στον $\mathbb{R}^3$ (γ) $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b+1 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}\right\}$, με τις συνήθεις πράξεις πινάκων (δ) V: το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών, με $\oplus$ και $\odot$ ορισμένες ως $u \oplus v = uv$, και $c \odot u = u^c$, $c \in \mathbb{R}$ (ε) V: το σύνολο των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων, με τις συνήθεις πράξεις πινάκων.

ΘΕΜΑ 2. (α) Βρείτε την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $(-1/\sqrt{2}, 0, a)$, $(0, -1, b)$. Για ποιά a, b είναι τα διανύσματα ορθογώνια; Ορθοκανονικά;

(β) Για ποιές τιμές του c είναι τα διανύσματα $(-1, 0, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 1, c)$ γραμμικά ανεξάρτητα;

(γ) Έστω $S = \{(1, 2, 2), (3, 2, 1), (11, 10, 7), (7, 6, 4)\}$. Να βρεθεί μια βάση του $V = \langle S \rangle$, η οποία περιέχεται στο S, καθώς και μια βάση του $V^{\perp}$. Επιπλέον, για $u = (4, 3, 1)$ να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του u πάνω στον V και να αποδειχθεί ότι (η ορθογώνια προβολή) είναι το μοναδικό διάνυσμα του V που είναι το "πιο κοντινό" στο u.

ΘΕΜΑ 3. (α) Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί; (1) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ με $T(A) = A^t$ (2) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $T(A) = \det(A)$ (3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x, y) = (x^2, 0)$ (4) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $T(A) = a_{11} + a_{22}$.

(β) Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T((u_1, u_2)^t) = (u_1 - 3u_2, 2u_1 - u_2)^t$. Να αποδείξετε ότι η T είναι γραμμικός τελεστής και να εξετάσετε αν είναι ισομορφισμός. Στη περίπτωση που η T είναι ισομορφισμός, να βρεθεί ο τύπος της T^{-1}.

(γ) Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι $r(A) = \dim(\Gamma_A) = \dim(\Sigma_A) = n - \dim((\Gamma_A)^{\perp})$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδειχθεί ότι αν A είναι ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας, τότε ο βαθμός $r(A)$ του A ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Να εξεταστεί αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, και αν είναι, τότε να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = D$ να είναι διαγώνιος.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρεθεί ο τύπος του γραμμικού τελεστή $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ο οποίος πρώτα στρέφει ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ κατά 45° αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού και εν συνεχεία απεικονίζει το διάνυσμα που προκύπτει στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα των x. Επίσης, να βρεθούν ο πίνακας του T ως προς την διατεταγμένη βάση $B = \{u_1, u_2\}$ του $\mathbb{R}^2$, όπου $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 2)$, και οι συντεταγμένες του $T((1, 0))$ ως προς την B.

(β) Να διατυπώσετε την ανισότητα Cauchy–Schwarz σε έναν $\mathbb{R}$-χώρο V με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$. Επίσης, να δώσετε την έκφραση της ανισότητας αυτής στον $\mathbb{R}$-χώρο $C[a, b]$ (των συνεχών συναρτήσεων από το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$) με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

(γ) Έστω $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ με $T(f(x)) = \begin{pmatrix} f'(0) & 2f(1) \\ 0 & f''(3) \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι η T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $P_2(\mathbb{R})$ και $M_2(\mathbb{R})$. Επίσης, να βρεθεί ο $\ker(T)$. Είναι η T 1-1; Επί;

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία!