ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

11 Ιουνιου 2019, 09:00πμ–12:00μμ

Διδασκοντες: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. (α) Θεωρούμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις:

$$x \oplus y = xy,\ \ \lambda \odot x = x^{\lambda}\ (x, y \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Να εξεταστεί αν το $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ είναι ένας $\mathbb{R}$-χώρος.

(β) Να εξετάσετε αν το σύνολο $S = \{1 + x, 1 + 2x, 1 + x^2, 1 + 2x^2\}$ παράγει τον $P_2(\mathbb{R})$. Υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του S που παράγει τον $P_2(\mathbb{R})$;

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ και $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Να αποδείξετε ότι τα W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$ και να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, και $W_1 + W_2$.

(β) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $S \subseteq V$ με $|S| = n$. Δείξτε ότι ο V είναι άπειρης διάστασης.

(γ) Έστω W το σύνολο των 3×3 πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ των οποίων το ίχνος είναι ίσο με μηδέν. Να αποδειχθεί ότι $W \leq M_3(\mathbb{R})$ και να βρεθεί μια βάση για τον W.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δύο γραμμικοί μετασχηματισμοί με πίνακες $(T)_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $(S)_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα ως προς τη βάση $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $T + S$ και οι διαστάσεις των $\ker(T + S)$ και $\mathrm{Im}(T + S)$.

(β) Έστω V και W δύο $\mathbb{R}$-χώροι με διαστάσεις n και m, αντίστοιχα. Δείξτε ότι οι $\mathbb{R}$-χώροι $\mathcal{L}(V, W)$ και $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφοι.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ με

$$T(p)(x) = (x - 1)p'(x) + p(x).$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι ένας γραμμικός τελεστής επί του $P_2(\mathbb{R})$. Επίσης, να εξετάσετε αν ο T είναι διαγωνοποιήσιμος, και αν είναι, τότε να βρείτε μια διατεταγμένη βάση β του $P_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε ο πίνακας $(T)_\beta$ να είναι διαγώνιος.

ΘΕΜΑ 5. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να γραφεί το διάνυσμα x ως $x = x_r + x_n$, όπου το x_r είναι στο χώρο γραμμών του A και το x_n είναι στο μηδενοχώρο του A. Δείξτε ότι η παραπάνω γραφή του x είναι μοναδική (δηλαδή αν x'_r είναι στο χώρο γραμμών του A, x'_n στο μηδενοχώρο του A, και $x = x'_r + x'_n$, τότε $x_r = x'_r$ και $x_n = x'_n$).

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες

Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία