ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

19 Ιουνιου 2017, 09:00πμ–12:00μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω V το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με $\oplus$ και $\odot$ που ορίζονται ως εξής: $u \oplus v = uv$ και $k \odot u = u^k$ για όλα τα $u, v \in V$ και $k \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν το σύνολο V με τις παραπάνω πράξεις είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να εξετάσετε αν ο πίνακας $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ ανήκει στον υπόχωρο του $M_2(\mathbb{R})$ που παράγεται από το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(β) Έστω $W = \langle (1,2,2), (3,2,1), (11,10,7), (7,6,4) \rangle$. Να βρείτε μια βάση για τον W και μια βάση για τον $W^\perp$.

(γ) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$, έστω W ένας υπόχωρος του V πεπερασμένης διάστασης, $\beta = \{w_1, \ldots, w_k\}$ μια ορθοκανονική βάση για τον W, και έστω $y \in V$. Να αποδείξετε ότι η ορθογώνια προβολή $u = \sum_{i=1}^{k} \langle y, w_i \rangle w_i$ του y πάνω στον W έχει την εξής ιδιότητα: $\forall x \in W$, $||y - x|| \geq ||y - u||$. Να δείξετε επίσης ότι η ανισότητα είναι ισότητα αν και μόνο αν $x = u$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί: (α) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x, y, z) = (0, z, y)$, (β) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ με $T(A) = A^t$, (γ) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $T(A) = \det(A)$.

(β) Έστω $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $T(a_0 + a_1 x) = (a_0, a_0 + a_1)$. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση T είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η T^{-1}.

(γ) Να βρείτε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ του οποίου ο πυρήνας παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 3)$ και $u_2 = (0, 1, 1)$. Είναι δυνατόν να βρείτε έναν τέτοιο γραμμικό μετασχηματισμό T ο οποίος είναι επί συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ο οποίος διαγωνοποιεί τον A. Επίσης, να βρεθεί ο πίνακας A^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να βρείτε μια βάση για τον $\mathbb{R}$-χώρο όλων των 2×2 συμμετρικών πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ και να την επεκτείνετε σε μια βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

(β) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-χώρο $P_2(\mathbb{R})$ και την συνήθη διατεταγμένη βάση του, $\beta = \{1, x, x^2\}$. Έστω $\beta' = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\}$. (Τα στοιχεία του β' διατάσσονται με βάση την παραπάνω γραφή.) Να αποδείξετε ότι το σύνολο β' είναι μια βάση του $P_2(\mathbb{R})$ και να βρείτε τον πίνακα που αλλάζει β-συντεταγμένες σε β'-συντεταγμένες.

(γ) Έστω W ο υπόχωρος του $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ο οποίος αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών που συγκλίνουν στο 0. Να αποδείξετε ότι ο W είναι άπειρης διάστασης $\mathbb{R}$-χώρος.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία