ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ‘‘ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ’’

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

7 Ιουνιου 2018, 09:00πμ–12:00μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Θεωρούμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις: $x \oplus y = xy - 1$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^+$, και $\lambda \odot x = x$ για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^+$. Να εξεταστεί αν το $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ είναι ένας $\mathbb{R}$-χώρος.

(β) Να εξετάσετε αν το σύνολο $S = \{x^3 + 2x + 1,\ x^2 - x + 2,\ x^3 + 2,\ -x^3 + x^2 - 5x + 2\}$ παράγει τον $P_3(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Θεωρούμε τους εξής υποχώρους του $\mathbb{R}$-χώρου $\mathbb{R}^3$ (με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού): $U = \langle (1,2,1), (2,2,-2), (1,3,3) \rangle$ και $V = \langle (1,2,2), (2,2,-6), (2,3,-1) \rangle$. Να προσδιορίσετε βάσεις για τους υποχώρους U, V, $U \cap V$ και $U + V$, καθώς επίσης και τις διαστάσεις τους.

(β) Έστω X και Y δύο υπόχωροι του $P_6(\mathbb{R})$ με $\dim(X) = 3$ και $\dim(Y) = 5$. Να βρεθούν οι πιθανές διαστάσεις για τον υπόχωρο $X \cap Y$, και για την μεγαλύτερη από αυτές να δοθεί ένα παράδειγμα συγκεκριμένων υποχώρων X και Y για τους οποίους έχουμε την τιμή αυτή.

(γ) Έστω V και W δύο $\mathbb{K}$-χώροι ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) δύο χώροι πεπερασμένης διάστασης. Να αποδειχθεί ότι ο V είναι ισόμορφος με τον W αν και μόνο αν $\dim(V) = \dim(W)$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να εξεταστεί αν υπάρχει $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ έτσι ώστε $Im(T) = \langle (1,-1,1) \rangle$ και ο πίνακας του T ως προς κατάλληλες βάσεις β και β' του $\mathbb{R}^3$ να είναι ο ${}_{\beta}(T)_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(β) Έστω $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ με πίνακα ως προς την συνήθη διατεταγμένη βάση $\beta = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ τον $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν: (1) ο τύπος του S, (2) ο πίνακας του S ως προς την διατεταγμένη βάση $\gamma = \{u_1 = (1,0,-2), u_2 = (0,1,0), u_3 = (2,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$, (3) αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $(S)_\gamma = P^{-1}AP$. Είναι ο S ισομορφισμός;

ΘΕΜΑ 4. (α) Στον $\mathbb{R}$-χώρο $P_1(\mathbb{R})$ θεωρούμε τις εξής διατεταγμένες βάσεις: $\beta = \{x-1, x+1\}$ και $\gamma = \{x, x-3\}$. Να βρεθούν: (1) ο πίνακας αλλαγής βάσης από την β στην γ (2) οι συντεταγμένες του διανύσματος $p(x) = 5x + 1$ ως προς την β και ως προς την γ.

(β) Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T((x,y,z)) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$. Να αποδείξετε ότι $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ και ότι ο T είναι διαγωνοποιήσιμος. Να βρείτε μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T, καθώς επίσης και τον πίνακα του T ως προς αυτή τη βάση. Επίσης, να βρεθούν δύο αντιστρέψιμοι πίνακες οι οποίοι διαγωνοποιούν τον πίνακα του T ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 5. Θεωρούμε τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $W^\perp$ του υποχώρου

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ y - z = 0\},$$

και την ορθογώνια προβολή του $u = (1,2,3)$ στον W.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία