ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

19 Σεπτεμβριου 2017, 09:00πμ–12:00μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Αν $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ και $k \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ και $k \odot (a_1, a_2) = (ka_1, a_2)$. Να εξεταστεί αν το $\mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω πράξεις είναι ένας $\mathbb{R}$-χώρος.

(β) Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος επί του K (όπου K είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$) και έστω W_1, W_2 δύο υπόχωροι του V. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W_1 \cup W_2$ είναι υπόχωρος του V *αν και μόνο αν* $W_1 \subseteq W_2$ ή $W_2 \subseteq W_1$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A\}$ και έστω η συνάρτηση $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ με τύπο $f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$. Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ και ότι η συνάρτηση f είναι γραμμική. Επίσης, να βρεθούν οι διαστάσεις $\dim(V)$, $\dim(\ker(f))$ και $\dim(\operatorname{Im}(f))$.

(β) Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1, 0, 0)$ και $u_2 = (0, 1, 0)$ και έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $w_1 = (1, 1, 0)$ και $w_2 = (0, 0, 1)$. Να βρείτε μια βάση για τους υποχώρους $U + W$ και $U \cap W$ του $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x).$$

Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς την βάση $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(β) Έστω V ένας K-χώρος ($K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και έστω $F : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να αποδειχθεί ότι ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του F που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ και $w = (2, 3, 3)$. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του w στον U. (Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.)

(β) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \ , \ \rangle$, και έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του V. Να αποδείξετε ότι $\langle S \rangle^\perp = S^\perp$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να βρεθεί ο $A^\perp$ όπου $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιώντας θεωρία διαγωνοποίησης πίνακα, να αποδειχθεί ότι

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot A + \frac{3 - 3^n}{2} \cdot I_2, \ n \in \mathbb{N}.$$

(β) Έστω V ένας μη τετριμμένος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ πεπερασμένης διάστασης. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μη μηδενικός γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to \mathbb{R}$.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία