ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

6 Σεπτεμβριου 2016, 12:00μμ–15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται *άρτια* αν $f(-t) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω V το σύνολο όλων των άρτιων συναρτήσεων με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως στο $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι το V είναι $\mathbb{R}$-χώρος.

(β) Αν $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ και $c \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ και $c \odot (a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. Είναι το $\mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω πράξεις ένας $\mathbb{R}$-χώρος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να εξετάσετε αν το σύνολο $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\} \subseteq P_3(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά εξαρτημένο ή γραμμικά ανεξάρτητο.

(β) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος και έστω $u, v \in V$ με $u \neq v$. Να αποδείξετε ότι αν $\{u, v\}$ είναι μια βάση για τον V και αν $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε τα σύνολα $\{u + v, au\}$ και $\{au, bv\}$ είναι επίσης βάσεις για τον V.

(γ) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $Z = \{f \in P_2(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$. Να αποδειχθεί ότι το Z είναι υπόχωρος του $P_2(\mathbb{R})$ και να βρεθεί η διάσταση του Z.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $T(a_1, a_2) = (a_1 + 3a_2, 0, 2a_1 - 4a_2)$. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση T είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Θεωρούμε τις εξής διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$: $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (η συνήθης διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^2$) και $\gamma = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς τις β και γ.

(β) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με $\dim(V) = n$ (όπου n κάποιος φυσικός) και έστω W ένας $\mathbb{R}$-χώρος ο οποίος είναι ισόμορφος προς τον V. Αν $T : V \to W$ είναι ένας ισομορφισμός και αν $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι μια μια βάση για τον V, τότε να αποδείξετε ότι το σύνολο $\gamma = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\}$ είναι μια βάση για τον W.

(γ) Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1, 2, 3)$, $(2, k, 3)$, $(4, 5, k + 8)$. Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες ο $W^\perp$ έχει διάσταση 0.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω T ο γραμμικός τελεστής επί του $P_1(\mathbb{R})$ με τύπο $T(p(x)) = p'(x)$. Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις $\beta = \{1, x\}$ και $\beta' = \{1 + x, 1 - x\}$ του $P_1(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αποτέλεσμα της θεωρίας (το οποίο να διατυπώσετε) και το γεγονός ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, να βρεθεί ο πίνακας $(T)_{\beta'}$.

(β) Έστω T ο γραμμικός τελεστής επί του $P_2(\mathbb{R})$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$T(f(x)) = f(1) + f'(0)x + (f'(0) + f''(0))x^2.$$

Να αποδειχθεί ότι ο T είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα $(T)_\beta$, όπου β η συνήθης διατεταγμένη βάση του $P_2(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω T ένας γραμμικός τελεστής επί ενός χώρου V με εσωτερικό γινόμενο τέτοιος ώστε $||T(x)|| = ||x||$ για όλα τα $x \in V$. Να αποδείξετε ότι ο τελεστής T είναι 1-1 απεικόνιση.

(β) Έστω $V = P_3(\mathbb{R})$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ για όλα τα $f, g \in V$. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του $f(x) = x^3$ επί του $P_2(\mathbb{R})$.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία