ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Κατευθυνση Σ.α.χ.μ.

9 Ιουνιου 2015, 9:00πμ–12:00μμ

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δοθεί ο ορισμός της έννοιας του διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{R}$.

(β) Να δοθεί ο ορισμός της έννοιας της βάσης για ένα πεπερασμένα γεννώμενο $\mathbb{R}$-χώρο V.

(γ) Να εξεταστεί αν $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1+2x+x^2,\ 3+x^2,\ x+x^2 \rangle$.

(δ) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $u_1 = (-1,2,3)$, $u_2 = (2,4,-6)$, και $u_3 = (-3,6,0)$, βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(ε) Έστω V ο υποχώρος του $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ που παράγεται από τις συναρτήσεις $f_1(x) = (\cos x)^2$, $f_2(x) = (\sin x)^2$, και $f_3(x) = \cos 2x$. Να βρεθεί μια βάση του V η οποία περιέχεται στο σύνολο $\{f_1, f_2, f_3\}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ και έστω A ο πίνακας του T ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Im}(T) = \Sigma_A$, $\mathrm{Ker}(T) = N(A) = (\Gamma_A)^{\perp}$, και ότι $r(A) = n - \dim(N(A))$.

(β) Να βρεθεί ο τύπος του γραμμικού μετασχηματισμού $T \in L(\mathbb{R}^2)$ ο οποίος είναι συμμετρία ως προς την ευθεία $y = 3x$. Επίσης, να εξεταστεί αν ο T είναι ισομορφισμός, και αν είναι, να βρεθεί ο T^{-1}.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω β και β' δύο βάσεις του V. Να δοθεί ο ορισμός του πίνακα αλλαγής βάσης από την β στην β' και να αποδειχθεί ότι ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι ο αντίστροφος πίνακας; Επίσης, να δώσετε μια βάση β του $\mathbb{R}^2$ διάφορη της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $u = (4,1)$ ως προς την βάση σας β.

(β) Έστω V και W δύο $\mathbb{R}$-χώροι και έστω $T \in L(V,W)$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Ker}(T)$ και $\mathrm{Im}(T)$ είναι υποχώροι των V και W, αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω V και W δύο $\mathbb{R}$-χώροι τέτοιοι ώστε $\dim(V) = 3$ και $\dim(W) = 2$. Ποιό είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμικών μετασχηματισμών από τον V στον W;

(β) Είναι ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών ισόμορφος με κάποιον $\mathbb{R}^n$, n φυσικός; Το ίδιο ερώτημα για τον χώρο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$, όπου n_0 κάποιος σταθερός φυσικός.

(γ) Έστω $W_1 = \langle (1,-2,0,0,3), (2,-5,-3,-2,6) \rangle$ και $W_2 = \langle (0,5,15,10,0), (2,6,18,8,6) \rangle$. Να αποδειχθεί ότι $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^5$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός επί του $P_2(\mathbb{R})$ ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $T(f)(x) = f'(x)$. Να εξεταστεί αν ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

(β) Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $u = (1,3)$ και $v = (2,2)$ του $\mathbb{R}^2$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

(γ) Δίδεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο

$$T((x,y,z)) = (x+2y+z,\ y+z,\ x+y,\ x-z).$$

Να αποδείξετε ότι $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τον $\mathrm{Im}(T)$, και στη συνέχεια να την επεκτείνετε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ (αν μπορεί να επεκταθεί).

Βαθμος Καθε Θεματος = 2, Αριστα = 10, Καλη Επιτυχια