Τελικη Εξεταση στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων - Εισαγωγικη Κατευθυνση Σ.α.χ.μ.
23 Ιουνιου 2014, 9:00πμ-12:00μμ
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. (α) Να εξετάσετε αν το σύνολο $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$, για κάποιο σταθερό πίνακα $B \in M_n(\mathbb{R})$, είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$.

(β) Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(1) Κάθε υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V που περιέχει το 0_V είναι υπόχωρος του V.

(2) Το σύνολο λύσεων ενός συμβιβαστού $m \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

(3) Δύο υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V που παράγουν τον ίδιο υπόχωρο του V πρέπει να είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2. Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από το σύνολο $S_1 = \{(1,3,-2,2,3), (1,4,-3,4,2), (2,3,-1,-2,9)\}$ και έστω W ο υπόχωρος που παράγεται από το $S_2 = \{(1,3,0,2,1), (1,5,-6,6,3), (2,5,3,2,1)\}$. Να αποδειχθεί ότι $U + W = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ και να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $U + W$. Περιγράψτε τα βήματα που θα ακολουθούσατε, αναφέροντας σχετικά αποτελέσματα της θεωρίας, σε περίπτωση που απαιτούνταν να βρεθεί μια βάση $\beta \subseteq S_1 \cup S_2$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ο πίνακας του $T_A \in L(\mathbb{R}^3)$ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ο πίνακας του T_A ως προς την βάση $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ και για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$, να βρεθεί το διάνυσμα των συντεταγμένων του $T_A(v)$ ως προς την β. Είναι ο T_A ισομορφισμός; Αν ναι, ποιός είναι ο $(T_A)^{-1}$;

(β) Έστω $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\forall p \in P_2(\mathbb{R})$, $T(p)$ είναι το εξής στοιχείο του $P_3(\mathbb{R})$: $T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$. Να αποδείξετε ότι (1) $\forall p \in P_2(\mathbb{R})$ ισχύει όντως ότι $T(p) \in P_3(\mathbb{R})$, (2) η T είναι γραμμική, και στη συνέχεια να βρείτε τον βαθμό και την μηδενικότητα της T.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να δώσετε τον ορισμό του διαγωνοποιήσιμου πίνακα.

(β) Έστω T ο εξής γραμμικός τελεστής επί του $\mathbb{R}^3$: $T(x,y,z) = (4x + z, 2x + 3y + 2z, x + 4z)$. Να εξετάσετε αν ο T είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρεθούν όλες οι δυνατές κανονικές μορφές Jordan του πίνακα $(T)_{\mathcal{E}}$, όπου $\mathcal{E}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω x και y δύο ορθογώνια στοιχεία του V. Να αποδείξετε ότι $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Από αυτό να εξάγετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στον $\mathbb{R}^2$.

(β) Έστω ο χώρος $P_3(\mathbb{R})$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ για όλα τα $p, q \in P_3(\mathbb{R})$. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $W = \langle \{1, x\} \rangle$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ
ΑΡΙΣΤΑ = 10
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ