Προαιρετικη Προοδος στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων - Κατευθυνση Σ.α.χ.μ.
2 Ιουνιου 2014
Διαρκεια εξετασης: 75′
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. (α) Επί του $\mathbb{R}^2$, ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής: Αν $u = (u_1, u_2)$ και $v = (v_1, v_2)$, τότε $u + v = (u_1 + v_1 - 1, u_2 + v_2 - 1)$ και $ku = (ku_1, ku_2)$. Ποιό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ παίζει τον ρόλο του ουδέτερου στοιχείου ως προς την πρόσθεση που ορίσθηκε παραπάνω; Είναι το $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-χώρος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας**.

(β) **Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας**.

(β1) Το σύνολο λύσεων ενός συμβιβαστού $m \times n$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

(β2) Τα πολυώνυμα $x-1$, $(x-1)^2$, και $(x-1)^3$ παράγουν τον $P_3(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $w_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $w_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$, $w_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$, $w_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$. Να βρεθεί μια βάση B του χώρου $W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$, η οποία περιέχεται στο σύνολο $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, και να γραφεί κάθε διάνυσμα στο $S - B$ (αν υπάρχει τέτοιο) ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της B.

(β) Έστω $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$, $\gamma = \{(2, 4), (3, 1)\}$. Να αποδείξετε ότι τα β και γ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την β στην γ και οι συντεταγμένες του $(2, 0)$ ως προς την γ.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, του οποίου ο πίνακας ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ να είναι ο A, και να βρείτε τον T. Στη συνέχεια, να εξετασθεί αν ο (παραπάνω μοναδικός) T είναι 1-1 απεικόνιση.

(β) Να βρεθεί ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, του οποίου η εικόνα να παράγεται από τα διανύσματα $(1, 2, 0, -4)$ και $(2, 0, -1, -3)$.

ΘΕΜΑ 4. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με $\dim(V) = n$. Έστω $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ μια βάση του V. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $T(v) = [v]_\beta$, $v \in V$, είναι ισομορφισμός.

Επιπλέον, να απαντήσετε στο εξής ερώτημα, **αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας**: Αν V και T όπως παραπάνω, και αν n διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ του V παράγουν τον V, είναι ο πίνακας

$$A = (T(u_1)|\cdots|T(u_n))$$

(δηλαδή, για $j = 1, \ldots, n$, η j-στήλη του A είναι το διάνυσμα στήλη $T(u_j)$) $n \times n$, και αν ναι, είναι δυνατόν τότε να ισχύει ότι $\det(A) = 0$;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑ ΔΥΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ