ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

5/5/2015, 9:00πμ – 11:00πμ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δοθεί ο ορισμός της βάσης και της διάστασης για ένα πεπερασμένο γεννώμενο $\mathbb{R}$-χώρο V. Επίσης, να εξηγήσετε γιατί ο ορισμός της διάστασης είναι καλώς τοποθετημένος.

(β) Αν W_1 και W_2 είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{R}$ χώρου V, ισχύει απαραίτητα ότι $W_1 \cap W_2$ και $W_1 \cup W_2$ είναι υπόχωροι του V;

(γ) Έστω $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Να αποδειχθεί ότι το B είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $(3,1,-4)$ ως προς την παραπάνω βάση B.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω C το σύνολο όλων των συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Να αποδειχθεί ότι το C είναι υπόχωρος του $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$ και να εξεταστεί αν ο C είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

(β) Έστω $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$. Να αποδειχθεί ότι W είναι υπόχωρος του $P_2(\mathbb{R})$ και ότι $\dim(W) = 2$. Επίσης, να επεκταθεί μια βάση του W σε μια βάση του $P_2(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω U και W οι υποχώροι του $\mathbb{R}^4$ οι οποίοι παράγονται από τα σύνολα $S_U = \{(1,1,0,-1),$ $(1,2,3,0),$ $(2,3,3,-1)\}$ και $S_W = \{(1,2,2,-2),$ $(2,3,2,-3),$ $(1,3,4,-3)\}$, αντίστοιχα. Να βρεθεί μια βάση του $U+W$ η οποία περιέχεται στο σύνολο $S_U \cup S_W$ και να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $(3,4,2,-4)$ ως προς την βάση που βρήκατε.

ΘΕΜΑ 4. Σωστό ή λάθος; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α) Κάθε σύνολο 4 διανυσμάτων του $\mathbb{R}^4$ περιέχει μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

(β) Έστω $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$. Τότε $\dim(W) = n$.

(γ) Υπάρχει στοιχείο του $P_2(\mathbb{R})$ το οποίο δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $1 + 2x + x^2$, $3 + x^2$, $x + x^2$.

(δ) Έστω $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ και $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4x\}$. Οποιαδήποτε δύο μη μηδενικά διανύσματα $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(ε) Ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ n διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ αν η μηδενικότητα του πίνακα $(u_1|u_2|\ldots|u_n)$ είναι διάφορη του μηδενός.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος άπειρης διάστασης. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του V τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \notin \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle.$$

Από αυτό να συμπεράνετε ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(β) Αν V είναι ένας μη τετριμμένος $\mathbb{R}$-χώρος, τότε υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to V$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ