Εξεταση στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ
Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων - Εισαγωγικη Κατευθυνση Σ.α.χ.μ.
24 Σεπτεμβριου 2014, 9:00πμ-12:00μμ
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης, Ευτυχια Μαμζεριδου

ΘΕΜΑ 1. Να εξετάσετε αν τα επόμενα σύνολα είναι υπόχωροι του $P_3(\mathbb{R})$: (i) όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ για τα οποία $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, (ii) όλα τα πολυώνυμα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ για τα οποία a_0, a_1, a_2 και a_3 είναι ρητοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$. Να αποδείξετε ότι W είναι υπόχωρος του $P_2(\mathbb{R})$, να βρείτε μια βάση και την διάσταση του W, και να επεκτείνετε την βάση του W που βρήκατε σε μια βάση του $P_2(\mathbb{R})$.

(β) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενοχώρο $N(A)$ του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να αποδείξετε ότι ο τελεστής $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ο οποίος ορίζεται από τις εξισώσεις $w_1 = 2x_1 + x_2$, $w_2 = 3x_1 + 4x_2$, είναι ισομορφισμός, χρησιμοποιώντας *μόνο* τον πίνακα του T ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ και αντίστοιχη θεωρία. Επίσης, να βρείτε το $T^{-1}(w_1, w_2)$, υπολογίζοντας τον πίνακα του T^{-1} ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$.

(β) Αν B_1, B_2, και B_3, είναι βάσεις για τον $\mathbb{R}^2$, και αν $P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ και $P_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ είναι οι πίνακες αλλαγής βάσης από την B_1 στην B_2 και από την B_2 στην B_3, αντίστοιχα, τότε να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την B_3 στην B_1.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να βρεθούν τρεις πίνακες, κάθε ένας από τους οποίους διαγωνοποιεί τον πίνακα A^{13}, όπου $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Επίσης, να βρεθούν ο A^{13} και το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(β) Να εξετάσετε αν η πρόταση "αν ένας $n \times n$ πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές" είναι αληθής ή ψευδής.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Να αποδείξετε ότι $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$ για όλα τα $u, v \in V$.

(β) Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι οι $N(A)$ (μηδενοχώρος του A) και $\Gamma(A)$ (χώρος γραμμών του A) είναι ορθογώνια συμπληρώματα στον $\mathbb{R}^n$ (ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο). Επίσης, να εξετάσετε αν $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n = N(A) + \Gamma(A)$.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες
Αριστα = 10
Καλη Επιτυχια