ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα ΣΑΧΜ

21 Σεπτεμβριου 2012

Διαρκεια εξετασης: 3 ωρες (09:00πμ – 12:00μμ)

Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω $\begin{pmatrix} a-1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 2a+1 & 3a+4 & a+8 & 4a+2 \end{pmatrix}$ ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος. Να βρεθεί για ποιές τιμές του a το σύστημα έχει (α) μοναδική λύση (να δοθεί σε κάθε περίπτωση), (β) άπειρο πλήθος λύσεων (να δοθούν σε κάθε περίπτωση) και (γ) καμία λύση.

ΘΕΜΑ 2. (α) Υποθέτοντας ότι όλοι οι (παρακάτω) πίνακες είναι $n \times n$ και αντιστρέψιμοι, να λύσετε ως προς D: $C^t B^{-1} A^2 BAC^{-1} DA^{-2} B^t C^{-2} = C^t$. Για την βαθμολόγηση, όλα τα βήματα πρέπει να φαίνονται αναλυτικά.

(β) Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, τότε ο B είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής του A στην δεύτερη γραμμή, τότε ο πίνακας που προκύπτει είναι αντιστρέψιμος.

(δ) **Σωστό ή λάθος;** Ένας αντιστρέψιμος πίνακας γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται η παρακάτω ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 2\cos x - 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\cos x - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\cos x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2\cos x - 1 \end{vmatrix}.$$

(β) Έστω $AX = B$ ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα, για το οποίο όλοι οι συντελεστές των αγνώστων και όλοι οι σταθεροί όροι είναι ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν $\det(A) = 1$, τότε κάθε θέση της λύσης του συστήματος είναι ακέραιος αριθμός.

(γ) **Σωστό ή λάθος;** Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A^{25} και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Απαιτείται πλήρης αιτιολόγηση των ισχυρισμών που θα κάνετε.

(β) Να αποδείξετε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ ενός 2×2 πίνακα A είναι το $x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$, όπου $\mathrm{tr}(A)$ είναι το ίχνος του A. Να χρησιμοποιήσετε το γεγονός αυτό για να δώσετε μια απόδειξη του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton για 2×2 πίνακες.

ΘΕΜΑ 5. (α) Να αποδειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε $f(A) = \mathbf{0}$.

(β) Να βρεθεί ένας πίνακας A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)$. Επίσης, να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά σας.

ΑΡΙΣΤΑ = ΔΕΚΑ (10) ΜΟΝΑΔΕΣ.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!