

ΘΕΜΑ 1. (α) Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το γραμμικό σύστημα με επανζημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \kappa & 1 \\ 1 & \kappa & 1 & \kappa \end{pmatrix}.$$

(β) Σωστό ή λάθος; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:** Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών A έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αν και μόνο αν, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα, ο οποίος περιέχει στήλη χωρίς ηγετικό στοιχείο.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθούν στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, E_3 τέτοιοι ώστε $E_3 E_2 E_1 A = U$, όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ και $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Επίσης, να βρεθεί ο P^{-1} , όπου $P = E_3 E_2 E_1$, με χρήση του adjoint.

(β) Έστω $A, B \in M_k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, με B αντιστρέψιμο. Να αποδειχθεί ότι $(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$. Να δοθεί απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τα εξής:

(γ1) Αν $A^2 = A$, τότε $A = O_2$ ή $A = I_2$.

(γ2) Αν $A^2 = I_2$, τότε $A = I_2$ ή $A = -I_2$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω ο $n \times n$ πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι $|A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

(β) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(γ) Να εξεταστεί αν τα παρακάτω είναι αληθή: (i) $|AA^t| = |A|^2$, (ii) $|-A| = -|A|$, (iii) Αν $|A| = 0$, τότε $A = O$, όπου O ο μηδενικός πίνακας. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε ο μηδενικός $n \times 1$ πίνακας είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = Bx$. Να εξετάσετε αν το μηδέν είναι ιδιοτιμή του πίνακα $B - A$.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του A , τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στη μέγιστη ιδιοτιμή του A , και το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $f : M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ η απεικόνιση με τύπο $f(x) = A \cdot x$ για κάθε $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ και έστω id η ταυτοτική απεικόνιση επί του $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ (δηλαδή, $\text{id}(x) = x$ για κάθε $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$). Να αποδείξετε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν η συνάρτηση $f - \lambda \cdot \text{id}$ δεν είναι 1-1.

(β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Cayley-Hamilton και, ως εφαρμογή του, να δώσετε τον τρόπο εύρεσης του αντιστρόφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα.