Τελικη Εξεταση στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι - Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
31 Ιανουαριου 2013 / 12:00-15:00
Διδασκων: Ελευθεριος Χ. Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (A \cdot B)^2$ είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι $(I_n - (B \cdot A)^2)^{-1} = I_n + B \cdot (I_n - (A \cdot B)^2)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A$.

(β) Αν για τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = \mathbf{0}$, τότε να αποδείξετε ότι $A^{-1} = -A^4$.

(γ) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = P \cdot B$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, έστω $a, b \in \mathbb{R}$, και έστω $S = (s_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $s_{ij} = a$ αν $i = j$ και $s_{ij} = b$ αν $i \neq j$. Να αποδείξετε ότι $\det(S) = (a-b)^n \left(1 + \dfrac{nb}{a-b}\right)$ αν $a \neq b$ και $\det(S) = 0$ αν $a = b$.

(β) Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ και έστω $X, C \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $AX = C$. Αν $D \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι $\det(A + C \cdot D^{\mathbf{t}}) = \det(A)\ (1 + D^{\mathbf{t}} \cdot X)$; **Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας!**

ΘΕΜΑ 3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Cramer, εξηγώντας ορολογία/συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσετε. Στη συνέχεια, να αποδείξετε το θεώρημα.

ΘΕΜΑ 4. Δίδεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 39 \\ \kappa & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα A για τις διάφορες τιμές των κ και λ. Στη συνέχεια, για εκείνες τις τιμές των κ και λ για τις οποίες $r(A) = 2$ (αν υπάρχουν αυτές οι τιμές), να λύσετε το σύστημα $x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 = c_4$, όπου για $i = 1, 2, 3, 4$, c_i είναι η i-στήλη του A.

ΘΕΜΑ 5. (α) Αν $\rho \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιος ώστε το πολυώνυμο $x - \rho$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A, τότε να αποδείξετε ότι το $x - \rho$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(β) Μπορεί ένα ιδιοδιάνυσμα ενός $n \times n$ πίνακα A να αντιστοιχεί σε δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές του A; **Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας!**

(γ) Να βρεθεί ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & \lambda \\ 1 & \mu & \nu \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

αν γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα $u = (1, 1, 1)$ και $v = (1, 0, -1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.

Επίσης, να βρεθεί ο A^{-1} (αν υπάρχει) καθώς επίσης το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Τέλος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, να αποδείξετε ότι $(A^2 - 9I_3) \cdot A^2 = \mathbf{0}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.