

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ - ΤΜΗΜΑ ΣΑΧΜ
10 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ (18:00-20:00)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{aligned}x - y + z &= 3 \\ x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= a.\end{aligned}$$

(β) Αν $u = (1, 2, 5)$ είναι μια λύση ενός συστήματος $AX = B$ και $v = (0, 1, 1)$ είναι μια λύση του συστήματος $AX = 0$, τότε βρείτε 4 επιπλέον λύσεις του $AX = B$. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$. Να αποδειχθεί ότι $AB = BA$.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Να εξετάσετε αν ο A είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι, να βρείτε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας την μέθοδο του adjoint.

ΘΕΜΑ 3. (α) Σωστό ή λάθος ; **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας!**

(1) Αν το άθροισμα της δεύτερης και τέταρτης γραμμής ενός 6×6 πίνακα A ισούται με το διάνυσμα της τελευταίας γραμμής, τότε $\det(A) = 0$.

(2) Αν $\det(A) = 1$ και όλα τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι αριθμοί.

(β) Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη της τιμής του x .

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του A , **χρησιμοποιώντας μόνον τη θεωρία στις ιδιοτιμές.**

(2) Να βρεθούν όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στο ελάχιστο στοιχείο του φάσματος του A .

(3) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

(β) Σωστό ή λάθος ; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών ενός πίνακα A είναι ιδιοτιμή του A .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.