Προαιρετικη Προοδος στην Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι - **Λυσεις των θεματων**
Πανεπιστημιο Αιγαιου - Τμημα ΣΑΧΜ
10 Ιανουαριου 2013
Διαρκεια εξετασης: 2 ωρες (18:00-20:00)
Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{aligned} x- \ y+z &= 3 \\ x+ \ y+az &= 1 \\ x+ay+z &= a. \end{aligned}$$

(β) Αν $u = (1, 2, 5)$ είναι μια λύση ενός συστήματος $AX = B$ και $v = (0, 1, 1)$ είναι μια λύση του συστήματος $AX = 0$, τότε βρείτε 4 επιπλέον λύσεις του $AX = B$. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**

Λύση. (α) Με A_a συμβολίζουμε τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων x, y, και z, του δοθέντος 3×3 συστήματος. Είναι πολύ εύκολο να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, ότι $|A_a| = -(a-1)(a+1)$. Επίσης, $|(A_a)_x| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = -4(a-1)(a+1)$, $|(A_a)_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a-3)$, $|(A_a)_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 4(a-1)$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(*i*) $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Τότε $|A_a| \neq 0$, οπότε το σύστημα δέχεται μοναδική λύση, η οποία από την μέθοδο Cramer είναι η διατεταγμένη τριάδα $\left(\frac{|(A_a)_x|}{|A_a|}, \frac{|(A_a)_y|}{|A_a|}, \frac{|(A_a)_z|}{|A_a|}\right) = \left(4, \frac{a-3}{a+1}, -\frac{4}{a+1}\right)$.

(*ii*) $a = -1$. Τότε $|A_a| = 0$ και $|(A_a)_z| = -8 \neq 0$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

(*iii*) $a = 1$. Τότε $|A_a| = |(A_a)_x| = |(A_a)_y| = |(A_a)_z| = 0$, οπότε είτε το σύστημα είναι αδύνατο είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Για $a = 1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x-y+z &= 3 \\ x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 1, \end{aligned}$$

το οποίο έχει άπειρο πλήθος λύσεων, η δε γενική μορφή των λύσεων του είναι $(2 - z, -1, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

(β) Στο μάθημα αποδείξαμε ότι αν s είναι λύση ενός γραμμικού συστήματος $AX = B$, τότε το σύνολο λύσεων του $AX = B$, είναι το

$$\Sigma = \{s + r : r \text{ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος } AX = 0\}.$$

Αφού $v = (0, 1, 1)$ είναι λύση του $AX = 0$, έπεται ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, κv είναι λύση του $AX = 0$, συνεπώς $u + \kappa v$ είναι λύση του $AX = B$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά, αφού $v \neq 0$ έπεται ότι για $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\kappa \neq \lambda$ έχουμε ότι $\kappa v \neq \lambda v$. Άρα, το σύνολο $T = \{u + \kappa v : \kappa \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του συνόλου λύσεων του συστήματος $AX = B$. Συνεπώς, μπορούμε εύκολα να βρούμε 4 επιπλέον λύσεις του $AX = B$. Για παράδειγμα, οι $u + iv$, $i = 1, 2, 3, 4$, είναι τέσσερις διακεκριμένες (δηλαδή, διαφορετικές ανά δύο) λύσεις του $AX = B$ και κάθε μια από αυτές είναι διάφορη της u. □

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$. Να αποδειχθεί ότι $AB = BA$.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Να εξετάσετε αν ο A είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι, να βρείτε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας την μέθοδο του adjoint.

Λύση. (α) Έχουμε $(AB)^2 = I_n \Rightarrow (AB)(AB) = I_n$. Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της προηγούμενης ισότητας από αριστερά επί A, παίρνουμε $(BA)B = A$ (διότι $A^2 = I_n$). Πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της προηγούμενης ισότητας από δεξιά επί B, παίρνουμε $BA = AB$ (διότι $B^2 = I_n$).

(β) Είναι πολύ εύκολο να αποδείξετε ότι $|A| \neq 0$, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Τώρα, η εύρεση του $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$ είναι απλή εφαρμογή της μεθόδου. Ανατρέξατε στις σημειώσεις του μαθήματος! □

ΘΕΜΑ 3. (α) *Σωστό ή λάθος* ; **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας!**

(1) Αν το άθροισμα της δεύτερης και τέταρτης γραμμής ενός 6×6 πίνακα A ισούται με το διάνυσμα της τελευταίας γραμμής, τότε $\det(A) = 0$.

(2) Αν $\det(A) = 1$ και όλα τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραιοι αριθμοί.

(β) Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη της τιμής του x.

Λύση. (α) (1) Σωστό: Έστω r_1, r_2, ..., r_6 οι γραμμές του 6×6 πίνακα A. Από την υπόθεσή μας, την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις γραμμές, και την ιδιότητα ότι η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με μηδέν αν ο πίνακας έχει δύο ίσες γραμμές, έχουμε:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_2 + r_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \mathbf{r_2} \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \mathbf{r_2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \mathbf{r_4} \\ r_5 \\ \mathbf{r_4} \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

(2) Σωστό: Αποδεικνύουμε αρχικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, τότε $|X| \in \mathbb{Z}$. Με επαγωγή στο n. Αν $n = 1$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$, αν $X = (x_{ij}) \in M_k(\mathbb{Z})$, τότε $|X| \in \mathbb{Z}$. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για n. Έστω $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Τότε

$$|X| = x_{11} \cdot c_{11} + x_{21} \cdot c_{21} + \cdots + x_{n1} \cdot c_{n1},$$

όπου για $i = 1, \ldots, n$, $c_{i1} = (-1)^{i+1}|X_{i1}|$ είναι ο συμπαράγοντας του x_{i1}. Εφόσον, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ο ελάσονας πίνακας X_{i1} (που προκύπτει από τον X διαγράφοντας την i-γραμμή του X και την πρώτη στήλη του X) είναι $(n-1) \times (n-1)$ και κάθε στοιχείο του X_{i1} είναι ακέραιος, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι $|X_{i1}| \in \mathbb{Z}$ και άρα $c_{i1} \in \mathbb{Z}$. Εφόσον το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό έπεται ότι $(x_{11} \cdot c_{11} + x_{21} \cdot c_{21} + \cdots + x_{n1} \cdot c_{n1}) \in \mathbb{Z}$ ή $|X| \in \mathbb{Z}$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική απόδειξη.

Έστω τώρα $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ όπως στη διατύπωση της δοθείσης πρότασης. Αφού $|A| = 1$, ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)$, όπου $\operatorname{adj}(A) = (c_{ij})^t$, ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα των συμπαραγόντων των στοιχείων του A. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης μας έχουμε ότι $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ και για όλα τα $j = 1, \ldots, n$. Άρα, $\operatorname{adj}(A) \in M_n(\mathbb{Z})$ και συνεπώς $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, όπως είχαμε ισχυριστεί.

Έχοντας αποδείξει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, τότε $|X| \in \mathbb{Z}$, μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο και ως εξής: Έστω $A^{-1} = (x_{ij})$. Θα αποδείξουμε ότι $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$. Αφού $AA^{-1} = I_n$ έχουμε ότι $\forall i = 1, \ldots, n$, $A \cdot c_i = e_i$, όπου c_i είναι η i-στήλη του A^{-1} και e_i είναι η i-στήλη του I_n. Κάθε ένα από τα παραπάνω n συστήματα έχει μοναδική λύση. Από την μέθοδο Cramer έπεται ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$,

$$x_{ij} = \frac{\det(A_{x_{ij}})}{\det(A)} = \det(A_{x_{ij}}),$$

για όλα τα $j = 1, \ldots, n$, εφόσον $\det(A) = 1$. Από το πρώτο τμήμα της απόδειξης, έπεται $\det(A_{x_{ij}}) \in \mathbb{Z}$, για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ και για όλα τα $j = 1, \ldots, n$. Άρα, $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

(β) Συμβολίζουμε την δοθείσα ορίζουσα με $D(x)$. Τότε

$$D(x) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} \overset{c_3 \to c_3 - c_2}{=} \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & 2x+7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2 \to c_2 - c_1}{=} \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} \overset{c_3 \to c_3 - c_2}{=} \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 4x+4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$. Άρα, $D(x) = -8$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση D είναι σταθερή. □

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του A, **χρησιμοποιώντας μόνον τη θεωρία στις ιδιοτιμές**.

(2) Να βρεθούν όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στο ελάχιστο στοιχείο του φάσματος του A.

(3) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(β) *Σωστό ή λάθος* ; **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας!**
Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών ενός πίνακα A είναι ιδιοτιμή του A.

Λύση. (α). (1) Είναι πολύ εύκολο να δείξετε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$|A - xI_3| = -(x-2)^2(x-3).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι 2 (διπλή) και 3 (απλή). Αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, ο A είναι αντιστρέψιμος. Τώρα, από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι $-(A-2I_3)^2(A-3I_3) = 0_{3\times 3}$, συνεπώς $\frac{1}{12}(A^2 - 7A + 16I_3)A = I_3$ ή $A^{-1} = \frac{1}{12}(A^2 - 7A + 16I_3)$.

(2) Το φάσμα του A είναι το σύνολο $\sigma(A) = \{2, 3\}$ και $\min(\sigma(A)) = 2$. Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 2 είναι ακριβώς οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A - 2I_3)X = 0$. Να λύσετε το σύστημα!

(3) Εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\chi_A(x) = -(x-2)^2(x-3)$, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι είτε το πολυώνυμο $(x-2)(x-3)$ είτε το πολυώνυμο $(x-2)^2(x-3)$. Επειδή $(A-2I_3)(A-3I_3) \neq 0_{2\times 2}$ έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $(x-2)^2(x-3)$.

(β) Λάθος: Έστω A ο πίνακας του (α). Στο (α) δείξαμε ότι το φάσμα του A είναι το σύνολο $\sigma(A) = \{2, 3\}$. Όμως, $2 + 3 = 5 \notin \sigma(A)$. □