

Φυλλάδιο 1 στην Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα II – Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

1. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{P_1P_2}$ με το αρχικό σημείο να είναι η αρχή των αξόνων.
(α') $P_1(-3, 5), P_2(2, 3)$.
(β') $P_1(0, 0), P_2(3, 4)$.
(γ') $P_1(3, -7, 2), P_2(-2, 5, -4)$.
(δ') $P_1(2, 2, 2), P_2(0, 0, 0)$.
2. Βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$, όπου
(α') $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$.
(β') $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$.
3. Βρείτε το τελικό σημείο του διανύσματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το $u = (5, 2)$ και του οποίου το αρχικό σημείο είναι το $A(3, 2)$.
4. Βρείτε το τελικό σημείο του διανύσματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το $u = (1, 2, 2)$ και του οποίου το αρχικό σημείο είναι το $B(3, -1, 0)$.
5. Βρείτε το αρχικό σημείο του διανύσματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το $u = (1, 2)$ και του οποίου το τελικό σημείο είναι το $B(2, 0)$.
6. Βρείτε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα u με τελικό σημείο το $A(3, 0, -5)$ έτσι ώστε:
(α') το u έχει την ίδια κατεύθυνση με το $v = (4, -2, -1)$.
(β') το u έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του $v = (4, -2, -1)$.
7. Βρείτε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα u με αρχικό σημείο το $A(-1, 3, -5)$ έτσι ώστε:
(α') το u έχει την ίδια κατεύθυνση με το $v = (6, 7, -3)$.
(β') το u έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του $v = (6, 7, -3)$.
8. Έστω $u = (3, -2), v = (1, 0)$, και $w = (-2, 4)$. Βρείτε τις συνιστώσες των διανυσμάτων:
(α') $u + w$.
(β') $v - 3u$.
(γ') $2(u - 5w)$.
(δ') $3v - 2(u + 2w)$.
(ε') $-3(w - 2u + v)$.
(ς') $(-2u - v) - 5(v + 3w)$.
9. Έστω $u = (-3, 1, 2, 4, 4), v = (4, 0, -8, 1, 2)$ και $w = (6, -1, -4, 3, -5)$. Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος x , το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $3u + v - 2w = 3x + 2w$.
10. Για ποιά(ες) τιμή(ες) του t , αν υπάρχουν, είναι τα παρακάτω διανύσματα παράλληλα προς το $u = (4, -1)$: (α) $(8t, -2)$, (β) $(8t, 2t)$, (γ) $(1, t^2)$.

11. Ποιά από τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^6$ είναι παράλληλα προς το $u = (-2, 1, 0, 3, 5, 1)$; (α) $(4, 2, 0, 6, 10, 2)$, (β) $(4, -2, 0, -6, -10, -2)$, (γ) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
12. Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $(-8, 8, 3, -1, 7)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(2, 1, 0, 1, -1)$, $(-2, 3, 1, 0, 2)$.
13. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί c_1 , c_2 , και c_3 έτσι ώστε $c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$.
14. Έστω $P(1, 3, 7)$. Αν το σημείο $(4, 0, -6)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα P και Q , ποίο είναι το Q ;
15. Να συμπληρώσετε τις αποδείξεις στο θεώρημα που αφορά στις ιδιότητες πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον $\mathbb{R}^n$.
16. ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
 - (α') Δύο ισοδύναμα διανύσματα πρέπει να έχουν το ίδιο αρχικό σημείο.
 - (β') Τα διανύσματα (a, b) και $(a, b, 0)$ είναι ισοδύναμα.
 - (γ') Αν $k \in \mathbb{R}$ και v είναι διάνυσμα, τότε τα v και kv είναι παράλληλα αν και μόνο αν $k \geq 0$.
 - (δ') Τα διανύσματα $v + (u + w)$ και $(w + v) + u$ είναι τα ίδια.
 - (ε') Αν $u + v = u + w$, τότε $v = w$.
 - (ς') Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και u, v είναι διανύσματα έτσι ώστε $au + bv = 0$, τότε τα u και v είναι παράλληλα.
 - (ζ') Συγγραμμικά διανύσματα με το ίδιο μήκος είναι ίσα.
 - (η') Οι γραμμικοί συνδυασμοί $a_1v_1 + a_2v_2$ και $b_1v_1 + b_2v_2$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν, $a_1 = b_1$ και $a_2 = b_2$.
 - (θ') Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και u, v είναι διανύσματα, τότε $(a + b)(u + v) = au + bv$.
 - (ι') Αν τα διανύσματα v και w δίνονται, τότε η εξίσωση διανυσμάτων $3(2v - x) = 5x - 4w + v$ λύνεται ως προς x .